Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Москва
«Просвещение»
2016

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г35

16+

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков,
В. Б. Некрасов, И. И. Юдина

Геометрия. Методические рекомендации. 8 класс :
Г35 учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др.]. — М. : Просвещение, 2016. — 110 с. : ил. — ISBN 978-5-09-038779-8.

Пособие предназначено для учителей, которые преподают геометрию в 7—9 классах по учебнику Л. С. Атанасяна и др. Оно написано в соответствии с методической концепцией этого учебника, полностью соответствует ему как по содержанию, так и по структуре. Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-038779-8

Предисловие

Книга является второй частью методического пособия для учителей, преподающих геометрию в 7—9 классах по учебнику Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной «Геометрия. 7—9 классы» (М.: Просвещение, 2013—2015). В ней отражена методическая концепция учебника, направленная на достижение учащимися (с помощью учителя и учебника) требуемых Федеральным государственным образовательным стандартом результатов обучения, как предметных, относящихся к геометрическим знаниям и умениям, так и более широких — метапредметных и личностных, включающих всестороннее развитие личности, потребность в непрерывном продолжении образования и самосовершенствовании.

Будучи нацеленным в первую очередь на предметные результаты обучения, пособие содержит комментарии к теоретическому и задачному материалу и методические рекомендации по проведению уроков по теме каждого параграфа. В самом начале комментариев и рекомендаций к данному параграфу говорится о его назначении. Далее внимание учителя обращается на те или иные моменты, связанные с изучением теоретического материала и решением задач. Для наиболее сложных теорем курса даны примерные планы проведения их доказательств. Эти планы рекомендуется записать на доске и в тетрадях, чтобы учащиеся смогли лучше усвоить логику рассуждений как при изучении теоретического материала в классе, так и при домашней работе с учебником. Указаны теоремы, которые можно предложить учащимся проработать самостоятельно по учебнику.

При изучении курса геометрии решению задач должно быть уделено большое внимание. Все новые понятия, теоремы, свойства геометрических фигур, способы рассуждений должны усваиваться в процессе решения задач. На это следует отводить в среднем не менее половины каждого урока. Достижению этой цели способствует большое количество и разнообразие задач, содержащихся в учебнике. Основными являются задачи к каждому параграфу. Дополнительные задачи к каждой главе имеют двойное назначение: для основной работы, если задач к какому-то параграфу главы окажется недостаточно, и для повторения материала данной главы. Более трудные задачи можно использовать для внеклассной работы. К каждому классу в учебнике приведены задачи повышенной трудности. Они не являются обязательными и предназначены для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими особый интерес к математике. Их можно использовать также в кружках и на факультативных занятиях.

Помимо задач из учебника, для работы в классе можно использовать задачи из рабочих тетрадей, входящих в данный учебно-методический комплект, а также упражнения, предложенные в данной книге. Среди них есть задачи по готовым рисункам, которые могут помочь подвести учащихся к новым понятиям и утверждениям, а также задачи для лучшего осмысления и усвоения изученного материала, для подготовки к самостоятельной или контрольной работе. Даны образцы возможного оформления решения задач.

Целый ряд задач: основных, дополнительных, а также задач повышенной трудности — имеют электронную версию, см.: «Единая коллекция ЦОР. Набор ЦОР к учебнику «Геометрия, 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна и др.». Электронный адрес: school-collection.edu.ru. Их можно использовать при наличии компьютерного обеспечения.

К каждому параграфу даны рекомендации по распределению задач для работы в классе и дома. В домашних заданиях наряду с номерами пунктов учебника и номерами задач указаны номера вопросов для повторения к соответствующей главе. Предполагается, что при подготовке к уроку учащийся должен найти ответы на эти вопросы в указанных пунктах учебника. Такой подход формирует умение самостоятельно работать с учебником.

Комментарии и рекомендации к каждому параграфу завершаются формулировкой основных требований, которые предъявляются к учащимся после изучения данного параграфа. Требования относятся как к знанию теоретического материала, так и к умению решать задачи и овладению теми или иными универсальными учебными действиями.

По каждой теме в книге приведены примерные самостоятельные и контрольные работы, указано назначение самостоятельных работ (обучающая или проверочная).

Варианты самостоятельных и контрольных работ, причём разного уровня сложности, и варианты математических диктантов можно брать также из дидактических материалов (авторы Б. Г. Зив и В. М. Мейлер), входящих в данный учебно-методический комплект.

Представлены карточки для устного опроса учащихся по материалу каждой главы. Их можно использовать как при текущем, так и при итоговом контроле знаний и умений учащихся. Объём вопросов каждой карточки учитель может менять в зависимости от цели опроса и времени, отведённого на опрос.

Книга содержит также рекомендации по проведению уроков итогового повторения.

В заключение рекомендаций к каждой главе даны решения отдельных задач этой главы, а также комментарии и указания к некоторым задачам. Их назначение — показать образцы рассуждений или примерное оформление решения.

В соответствии со структурой основного учебника в конце пособия даны решения либо комментарии и указания к решению отдельных задач повышенной трудности.

Примерное поурочное тематическое планирование составлено из расчёта, что на изучение геометрии в 8 классе отводится 2 часа в неделю. В соответствии с этим по каждому параграфу указано примерное количество отводимых на него уроков.

В конце пособия приведено примерное тематическое планирование учебного материала.

В классах с хорошей математической подготовкой учащихся при наличии времени в конце учебного года можно отвести несколько уроков на ознакомление учащихся с векторами и действиями над ними, используя материал главы IX. Ранее эта глава была завершающей в 8 классе, а теперь с неё начинается 9 класс. Знакомство учащихся с векторами в курсе геометрии в конце 8 класса будет способствовать лучшему восприятию действий с векторными величинами, изучаемыми в курсе физики в 9 классе. Материал по главе IX содержится в пособии «Геометрия. Методические рекомендации. 9 класс» тех же авторов.

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, приведённые в книге, являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития учащихся конкретного класса учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в подбор заданий для классной, самостоятельной и домашней работы.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами и их свойствами, но и на решение более важных задач, определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом, — формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно, точно и компетентно излагать свои мысли, аргументировать высказанные утверждения, всестороннее развитие творческих способностей учащегося.

ГЛАВА

V Четырёхугольники *(14 ч)*

Глава посвящена изучению наиболее важных видов четырёхугольников — параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. Изложение материала в целом традиционное, что позволяет учителю широко использовать имеющиеся методические разработки и опыт преподавания.

Завершается глава рассмотрением осевой и центральной симметрий, которые вводятся здесь не как преобразования плоскости, а как свойства геометрических фигур, при этом отмечаются элементы симметрии изученных четырёхугольников.

Примерное тематическое планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Многоугольники	2	1—7	С-1
§ 2. Параллелограмм и трапеция	6	8—20	С-2, С-3, С-4, С-5
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	4	21—26	С-6, С-7, С-8
Решение задач	1	1—26	—
Контрольная работа № 1	1	—	К-1

§ 1 Многоугольники *(2 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия ломаной, многоугольника и выпуклого многоугольника, вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и рассмотреть четырёхугольник как частный вид многоугольника. В последующих параграфах подробно изучаются наиболее важные виды четырёхугольников.

На первом уроке можно ввести понятия ломаной, многоугольника и выпуклого многоугольника, а на втором — вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и как следствие из неё тот факт, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

Изучение темы можно начать с демонстрации рисунков различных ломаных, отмечая по ходу показа, что все эти фигуры составлены из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, и вводя связанную с этими фигурами терминологию: ломаная, звенья, вершины, длина ломаной, замкнутая ломаная. Затем из всех замкнутых ломаных нужно выделить те, у которых несмежные звенья не имеют общих точек, и сказать, что каждая такая ломаная называется многоугольником, её звенья и вершины называются сторонами и вершинами многоугольника, длина ломаной называется периметром многоугольника, а многоугольник с n вершинами называется n-угольником. Можно отметить, что знакомые учащимся треугольник и прямоугольник являются частными случаями многоугольников. Необходимо подчеркнуть, что каждый многоугольник разделяет плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю, причём фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником (такое толкование многоугольника понадобится в следующей главе при рассмотрении понятия площади).

Для усвоения понятия многоугольника можно выполнить следующее упражнение по заготовленным чертежам (рис. 1):

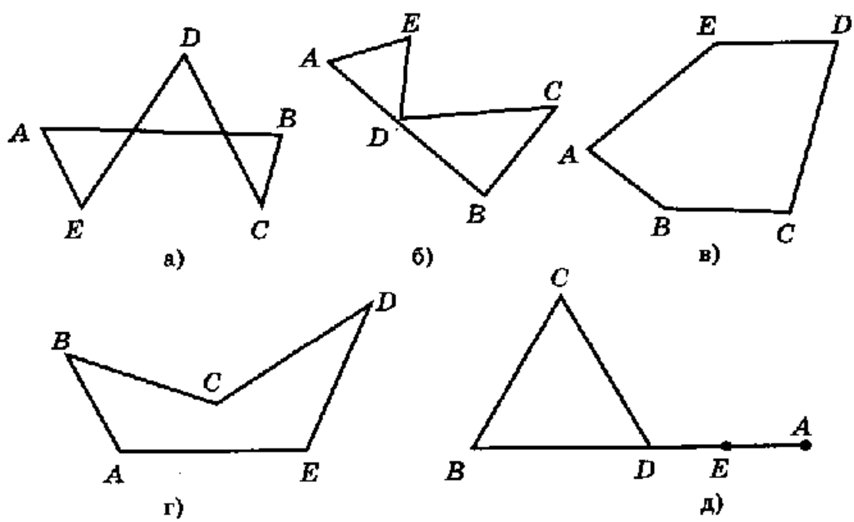
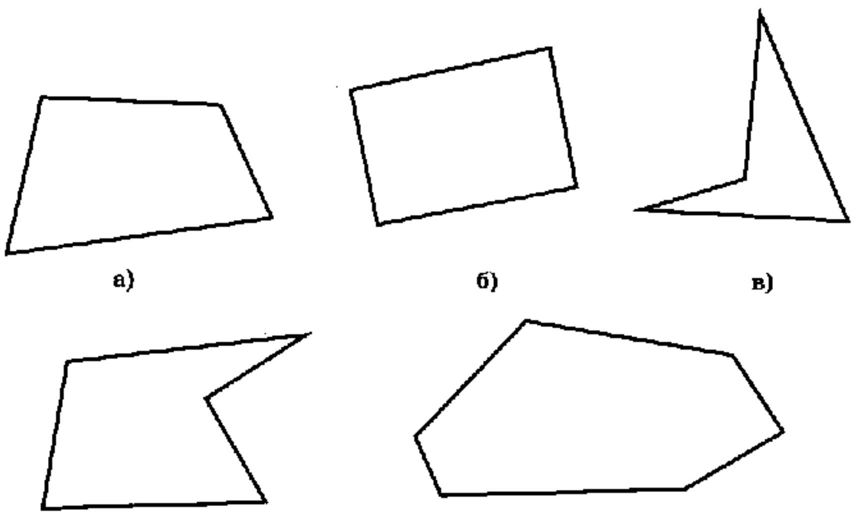


Рис. 1

1. Ломаные на рисунке 1, *а—д* составлены из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*. Какие из них являются многоугольниками? Отметьте какие-нибудь точки во внутренней (внешней) области одного из многоугольников, изображённых на этом рисунке (на доске и в тетрадях).

С целью лучшего усвоения понятия выпуклого многоугольника, после того как дано его определение, можно выполнить следующие упражнения:

2. Какие из многоугольников, изображённых на рисунке 2, *а—д*, являются выпуклыми? Обозначьте вершины одного из выпуклых многоугольников буквами и назовите его углы.



а) б) в) г) д)

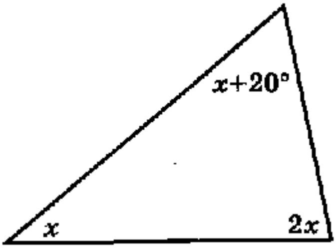
Рис. 2

3. Начертите выпуклый восьмиугольник и проведите все диагонали из какой-нибудь его вершины. Сколько при этом образовалось треугольников? Найдите сумму углов восьмиугольника.

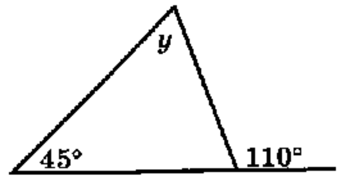
Задачу 364 (а) можно предложить учащимся решить в классе самостоятельно.

Дома: после первого урока: вопросы для повторения 1—3 (с. 113); задачи 363, 364 (б), 366.

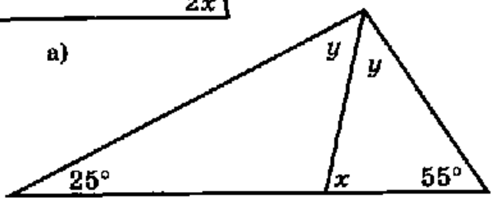
Перед доказательством утверждения о сумме углов выпуклого многоугольника полезно провести устную работу по заготовленным чертежам.



а)



б)



в)

Рис. 3

4. По данным рисунка 3, *а—в* найдите x и y.
5. С помощью разбиения на треугольники найдите суммы углов выпуклых девятиугольника и одиннадцатиугольника.

Затем формулируется утверждение о сумме углов выпуклого многоугольника и обсуждается план доказательства. Само доказательство можно предложить учащимся провести самостоятельно, а также самостоятельно они могут изучить п. 42 «Четырёхугольник».

В классе можно решить задачи 364 (в), 365 (в), 368.

Дома: вопросы для повторения 4—7 (с. 113); задачи 365 (а), 369, 370.

В конце второго урока полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Найдите сумму углов выпуклого тринадцатиугольника.
2. Каждый угол выпуклого многоугольника равен 135°. Найдите число сторон этого многоугольника.

Вариант II

1. Найдите сумму углов выпуклого двенадцатиугольника.
2. Сумма углов выпуклого многоугольника с равными друг другу углами равна 1260°. Найдите число сторон этого многоугольника.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Каждый угол данного выпуклого многоугольника равен 150°. Найдите сумму углов выпуклого многоугольника, число сторон которого в два раза меньше, чем число сторон данного многоугольника.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельной работы С-1 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какая фигура называется ломаной, какая ломаная называется многоугольником и какой многоугольник называется выпуклым, **знать** связанную с этими понятиями терминологию (звенья ломаной, стороны, вершины и диагонали многоугольника и т. д.); **уметь вывести формулу** суммы углов выпуклого многоугольника; **знать** специфическую терминологию, относящуюся к четырёхугольникам (противоположные стороны, противоположные вершины); **уметь решать задачи** типа 364—370; в ходе изучения параграфа **проявить способность** к самостоятельному получению и усвоению новой информации с помощью учебника.

§ 2 Параллелограмм и трапеция *(6 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия параллелограмма и трапеции, рассмотреть свойства и признаки параллелограмма и закрепить полученные знания в процессе решения задач. Следует иметь в виду, что свойства и признаки параллелограмма широко используются в следующих разделах курса, поэтому выработке соответствующих умений и навыков следует уделить серьёзное внимание.

Учебный материал можно распределить по урокам следующим образом: параллелограмм, его свойства и признаки — 3 урока; трапеция — 2 урока; задачи на построение циркулем и линейкой — 1 урок.

Определение параллелограмма можно отработать в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 4, *а* $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$. Является ли четырёхугольник $ABCD$ параллелограммом?
2. На рисунке 4, *б* $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

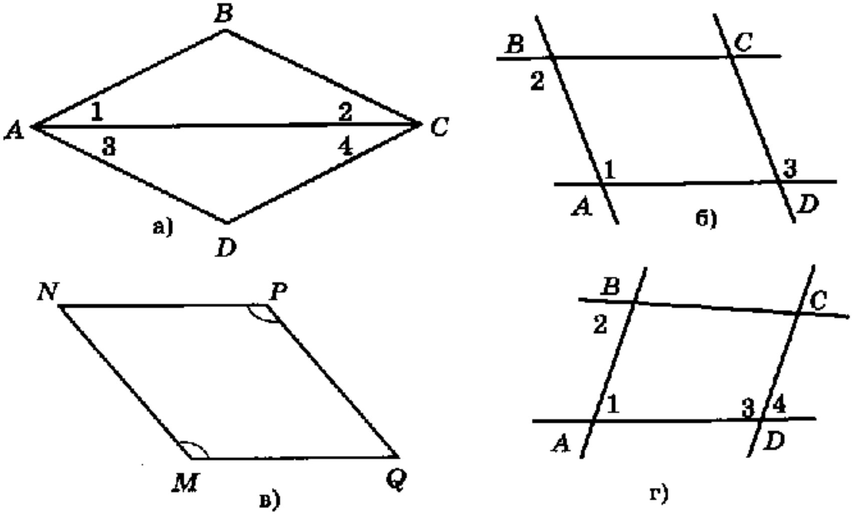


Рис. 4

3. На рисунке 4, *в* $MN \parallel PQ$, $\angle M = \angle P$. Докажите, что четырёхугольник $MNPQ$ — параллелограмм.
4. Является ли четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рисунке 4, *г*, параллелограммом, если: а) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; б) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 \neq \angle 4$?
5. Докажите, что в параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Теоретический материал п. 43 достаточно прост, поэтому доказательство утверждений о свойствах параллелограмма можно предложить учащимся провести самостоятельно (без помощи учебника) на первом же уроке. Для экономии времени можно провести эту работу по вариантам, а затем выслушать учеников, выполнивших разные варианты. Для лучшего усвоения полученных сведений целесообразно решить в классе задачи 376 (а) — устно, 376 (б), 372 (а).

Перед тем как приступить к изучению признаков параллелограмма, следует напомнить учащимся, что означает слово «признак» и что такое обратная теорема. Полезно предложить учащимся самим сформулировать теоремы, обратные утверждениям о свойствах параллелограмма. В процессе этой работы нужно подчеркнуть, что если некоторое утверждение верно, то отсюда ещё не следует, что верно и обратное ему утверждение. Обратное утверждение требует отдельного рассмотрения в отношении того, верно оно или нет.

Доказательства утверждений о признаках параллелограмма можно предложить учащимся провести самостоятельно. Для лучшего усвоения доказанных теорем на уроке можно решить задачи 379, 382.

На третьем уроке решаются задачи на свойства и признаки параллелограмма: 376 (г) — устно, 372 (б), 373, 374, 381, 384, 429 — устно.

Дома: вопросы для повторения 8—11 (с. 113); задачи 372 (в), 375, 376 (в, д), 377, 380, 383, 430.

Замечание. Утверждение задачи 384 (в учебнике приведено решение) рекомендуется запомнить, так как в дальнейшем оно используется при решении других задач.

В конце третьего урока целесообразно провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

На рисунке 5 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Луч AN — биссектриса угла BAD, луч BM — биссектриса угла ABC. Докажите, что четырёхугольник $ABNM$ — параллелограмм.

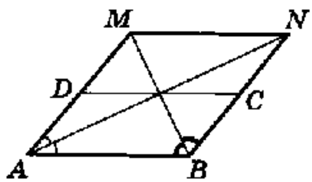


Рис. 5

Вариант II

На рисунке 6 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Луч AM — биссектриса угла BAD, луч CN — биссектриса угла BCD. Докажите, что четырёхугольник $ANCM$ — параллелограмм.

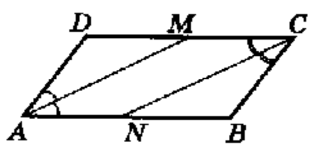


Рис. 6

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Докажите, что угол между перпендикулярами, проведёнными из вершины тупого угла параллелограмма к прямым, содержащим стороны параллелограмма, равен острому углу параллелограмма, а угол между перпендикулярами, проведёнными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-2 и С-3 из дидактических материалов.

Перед изучением п. 45 «Трапеция» полезно ещё раз вспомнить свойства и признаки параллельных прямых в процессе устного выполнения следующего задания:

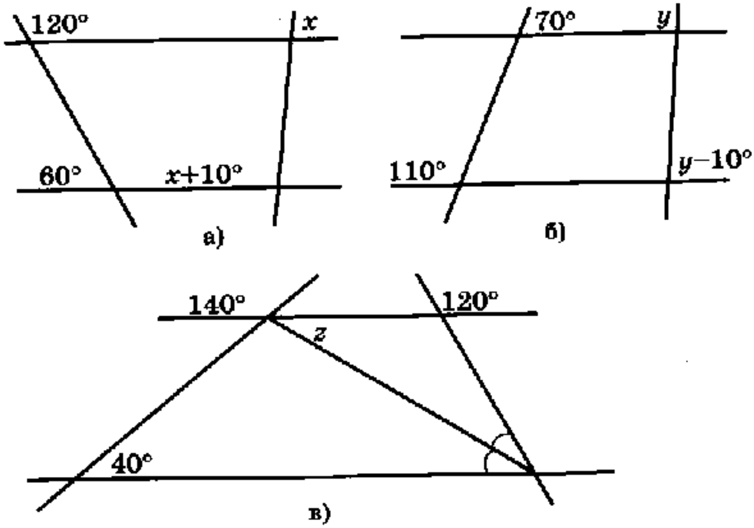


Рис. 7

6. По данным рисунка 7, *а—в* найдите x, y, z.

Следует иметь в виду, что в самом п. 45 учебника приведены только определения трапеции, её видов и элементов, а свойства и признаки раскрыты в задачах 386 (свойство средней линии трапеции), 388 (свойства равнобедренной трапеции), 389 (признаки равнобедренной трапеции). Эти задачи необходимо разобрать с учащимися для того, чтобы их результаты использовать в дальнейшем при решении других задач. Это же относится и к задаче 385 (теорема Фалеса), решение которой приведено в учебнике.

В классе на двух уроках, посвящённых трапеции, рекомендуется решить задачи 385, 386, 387, 388 (а), 389 (б), 390 (устно).

Дома: вопросы для повторения 12, 13 (с. 114); задачи 389 (б), 388 (а), 392 (а, б), 438.

На втором уроке можно провести *самостоятельную работу*, проверить которую рекомендуется сразу же, например, с помощью мультимедийного оборудования.

Самостоятельная работа

Вариант I

Найдите боковые стороны равнобедренной трапеции, основания которой равны 14 см и 8 см, а один из углов равен 120°.

Вариант II

Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если её большее основание равно 16 см, боковая сторона — 10 см, а один из углов равен 60°.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ делит пополам угол BAD. Найдите периметр трапеции, если её основание AD равно 12 см, а угол ADC равен 60°.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-4 из дидактических материалов.

В § 2 значительное место отводится задачам на построение с помощью циркуля и линейки. На с. 106—107 учебника приведено решение задачи 393 (в), оформленное по общей схеме, изложенной ранее на с. 94 (анализ, построение, доказательство, исследование). Однако учителю следует иметь в виду, что в этой схеме обязательными для всех учащихся являются только непосредственно построение (с соответствующим описанием) и доказательство. Исследование проводится только тогда, когда это оговорено условием задачи.

В начале урока по решению задач на построение полезно вспомнить уже известные основные задачи: построение угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной к данной; середины отрезка; прямой, параллельной данной.

В классе рекомендуется решить задачи 393 (в), 394, 395, 397 (б) (в тетрадях выполняется только построение).

Можно использовать также некоторые задачи самостоятельной работы С-5 из дидактических материалов.

Дома: задачи 393 (а, б), 396, 397 (а), 398.

Замечание. Задача 396 о делении данного отрезка на n равных частей приведена с решением. Эта задача неоднократно используется в дальнейшем, поэтому необходимо убедиться в том, что все учащиеся достаточно хорошо усвоили способ деления отрезка на n равных частей.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать и уметь чётко формулировать** определения параллелограмма и трапеции; **уметь формулировать и доказывать** утверждения о свойствах и признаках параллелограмма, указывая среди них те, которые являются обратными к уже доказанным утверждениям; **знать и уметь обосновывать** утверждения о свойствах и признаках равнобедренной трапеции (задачи 388 и 389); **уметь решать задачи** типа 372—377, 379—383, 387, 390, 392, а также **делить отрезок** на n равных частей с помощью циркуля и линейки и **решать задачи на построение** типа 393, 395, 397, 398; должны в ходе изучения темы **проявить способность** самостоятельно (даже не используя учебник) **доказывать утверждения** о свойствах и признаках параллелограмма.

§ 3 Прямоугольник, ромб, квадрат *(4 ч)*

Назначение параграфа — более детально познакомить учащихся с частными видами параллелограмма — прямоугольником, ромбом и квадратом, их особыми свойствами, а также осевой и центральной симметрией как свойствами некоторых геометрических фигур.

На первом уроке можно изучить п. 46 «Прямоугольник», на втором — п. 47 «Ромб и квадрат», а третий урок целесообразно посвятить закреплению полученных сведений в процессе решения задач. Пункт 48 «Осевая и центральная симметрии» изучается на последнем, четвёртом уроке.

Перед изучением темы «Прямоугольник» полезно повторить свойства параллелограмма, признаки равенства прямоугольных треугольников и утверждение о сумме углов выпуклого четырёхугольника в процессе решения устных задач следующего типа:

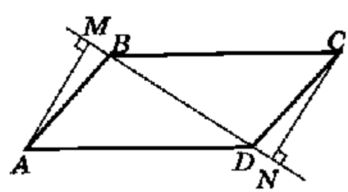


Рис. 8

1. Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если их градусные меры пропорциональны числам 1, 2, 3, 4.
2. Докажите, что расстояния AM и CN от вершин A и C параллелограмма $ABCD$ до прямой BD равны (рис. 8).
3. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle A = 3\angle B$.

После того как сформулировано определение прямоугольника, можно предложить учащимся самим перечислить те его свойства, которыми он обладает, как и любой параллелограмм. Желательно, чтобы учащиеся сами доказали утверждение об особом свойстве прямоугольника, а также обратное утверждение (признак прямоугольника). Кроме того, в классе рекомендуется решить задачи 399 (устно), 400, 402.

Дома: вопросы для повторения 14, 15 (с. 114); задачи 401 (а), 403, 413 (а).

Перед рассмотрением другого частного вида параллелограмма — ромба полезно провести устную работу по заранее заготовленным чертежам к следующим заданиям:

4. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, высота которого равна 6 см, а угол при вершине равен 120°.

5. Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны. Докажите, что все его стороны равны.

После введения определения ромба можно предложить учащимся самим сформулировать те его свойства, которые следуют непосредственно из определения, а затем самостоятельно (например, по вариантам) доказать утверждения об особых свойствах ромба. На этом уроке можно решить задачи 405 (а), 408 (б). Полезно обратить внимание учащихся на то, что утверждения, сформулированные в задаче 408 (а, б), являются признаками ромба.

Определение квадрата и его свойства учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику. Затем полезно решить задачу 410 (а, б, в). Сделать это можно устно с помощью заготовленных заранее чертежей.

Дома: вопросы для повторения 16—17 (с. 114); задачи 405 (б), 408 (а), 409.

На следующем уроке усвоение изученного материала закрепляется в процессе решения задач.

В классе рекомендуется решить задачи 404, 407, 412, 414 (а).

Дома: задачи 406, 411, 413 (в), 415 (б).

На этом же уроке целесообразно провести *самостоятельную работу* обучающего характера с проверкой в классе.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Найдите углы ромба, если его диагонали составляют с его стороной углы, один из которых на 30° меньше другого.
2. Задача 413 (б).

Вариант II

1. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.
2. Задача 414 (б).

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N. Найдите угол ANB, если $\angle AMC = 120°$.
2. Постройте прямоугольник $ABCD$ по стороне AB и углу AOB, где O — точка пересечения диагоналей.

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-6, С-7, С-8 из дидактических материалов.

Объяснение нового материала по теме «Осевая и центральная симметрии» целесообразно построить в виде лекции, сопровождающейся показом большого иллюстративного материала: чертежей, рисунков, орнаментов и т. п.

В классе рекомендуется решить задачи 416, 417, 418 (устно), 419, 422 (устно).

Дома: вопросы для повторения 18—22 (с. 114); задачи 420, 421, 423.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать и уметь** чётко формулировать определения прямоугольника, ромба, квадрата; **уметь формулировать и доказывать** утверждения об особых свойствах прямоугольника и ромба и обратные утверждения (признаки прямоугольника и ромба); **уметь объяснить**, какие точки и какая фигура называются симметричными относительно прямой (относительно точки), что называется осью (центром) симметрии фигуры, **приводить примеры** симметричных фигур и распознавать такие фигуры; **уметь решать задачи** типа 401—423; в ходе изучения темы должны ещё более **развить умение** самостоятельно обосновывать новые утверждения, опираясь на накопленный опыт.

Решение задач (1 ч)

Назначение этого урока — закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе. На уроке рекомендуется решить задачи 428, 434, 438. В конце урока можно провести *самостоятельную работу* проверочного характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AD и BC соответственно в точках E и F. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 28 см, $AE = 5$ см, $BF = 3$ см.

2. Найдите меньшую боковую сторону прямоугольной трапеции, основания которой равны 10 см и 6 см, а один из углов равен 45°.

Вариант II

1. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см.
2. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, основания которой равны 12 см и 6 см, а один из углов равен 60°.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB вписан прямоугольник $KMNP$, как показано на рисунке 9. Периметр этого прямоугольника равен 30 см, а смежные стороны KM и KP пропорциональны числам 2 и 3, т. е. $KM : KP = 2 : 3$. Найдите гипотенузу треугольника ABC.

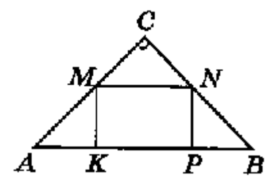


Рис. 9

2. Один из углов равнобедренной трапеции равен 60°, а диагональ трапеции делит этот угол пополам. Найдите периметр трапеции, если её большее основание равно 14 см.

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты самостоятельных работ С-2 — С-8 из дидактических материалов.

Контрольная работа № 1 *(1 ч)*

Вариант I

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между диагоналями, если $\angle ABO = 30°$.
2. В параллелограмме $KMNP$ проведена биссектриса угла MKP, которая пересекает сторону MN в точке E. а) Докажите, что треугольник KME равнобедренный. б) Найдите сторону KP, если $ME = 10$ см, а периметр параллелограмма равен 52 см.

Вариант II

1. Диагонали ромба $KMNP$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника KOM, если угол MNP равен 80°.
2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AB = BM$. а) Докажите, что луч AM — биссектриса угла BAD. б) Найдите периметр параллелограмма, если $CD = 8$ см, $CM = 4$ см.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Через вершину C прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали BD и пересекающая прямую AB в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая прямую BC в точке N. Найдите периметр четырёхугольника $ACMN$, если диагональ BD равна 8 см.
2. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Луч DM пересекает прямую AB в точке N. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AN = 10$ см.

Можно использовать также варианты контрольной работы К-1 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Дайте определение параллелограмма и сформулируйте утверждения о его свойствах.
2. Периметр параллелограмма равен 88 см. Найдите стороны параллелограмма, если известно, что одна из них в три раза больше другой.
3. Меньшая сторона параллелограмма равна 4 см. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, пересекаются в точке, лежащей на противоположной стороне. Найдите периметр параллелограмма.

Вариант II

1. Сформулируйте утверждения о признаках параллелограмма.
2. Докажите, что если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырёхугольник — параллелограмм.
3. Докажите, что середины сторон параллелограмма являются вершинами ромба.

Вариант III

1. Какой четырёхугольник называется прямоугольником? Сформулируйте утверждение об особом свойстве прямоугольника.
2. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
3. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

Вариант IV

1. Какой четырёхугольник называется ромбом? Сформулируйте утверждение об особом свойстве ромба.
2. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 120°$, $BD = 8$ см.
3. Докажите, что если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Вариант V

1. Какой четырёхугольник называется трапецией? Какая трапеция называется равнобедренной? прямоугольной?
2. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная.
3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB \perp AD$) диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle D = 30°$. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание равно 24 см.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы V

374. Можно предложить следующую краткую запись решения задачи (рис. 10):

а) $AD \parallel BC$, AK — секущая, углы 2 и 3 — накрест лежащие, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$. Но $\angle 1 = \angle 3$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $AB = BK = 15$ см;

б) $BC = BK + KC = 24$ см;

в) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 78$ см.

375. При решении этой задачи следует учесть, что возможны два случая. В самом деле, пусть AK — биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 10). Рассмотрите два случая: $BK = 7$ см, $CK = 14$ см и $BK = 14$ см, $CK = 7$ см.

Рис. 10

383. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, поэтому $\angle ABD = \angle CDB$ (рис. 11). Следовательно, $\triangle ABP = \triangle CDQ$ (по двум сторонам и углу между ними). Отсюда следует, что $AP = CQ$. Аналогично доказывается, что $\triangle ADQ = \triangle CBP$, поэтому $AQ = CP$. По признаку 2^0 п. 44 $APCQ$ — параллелограмм.

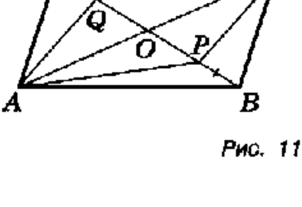


Рис. 11

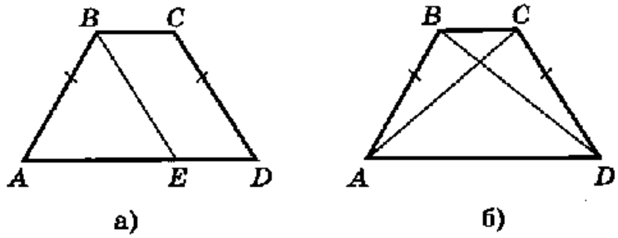


Рис. 12

388. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD, $BC < AD$.

а) Проведём прямую BE, параллельную прямой CD, E — точка на отрезке AD (рис. 12, *а*). Так как $BCDE$ — параллелограмм, то $CD = BE$. Но $CD = AB$, поэтому $AB = BE$, т. е. треугольник ABE равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle A = \angle BEA$. Так как $BE \parallel CD$, то $\angle BEA = \angle D$, следовательно, $\angle A = \angle D$, т. е. углы при основании AD равны. Далее, $\angle B = 180° - \angle A$, $\angle C = 180° - \angle D$, поэтому $\angle B = \angle C$.

б) Треугольники ABD и DCA равны (рис. 12, *б*) по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD — общая сторона, $\angle A = \angle D$ по доказанному в п. *а*)), следовательно, $BD = AC$.

394. Пусть A, B, C — данные точки. Соединим попарно эти точки и через каждую вершину треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне (рис. 13). Четырёхугольники A_1BAC, C_1ACB, B_1ABC — параллелограммы по определению. Задача, очевидно, имеет только эти три решения, так как не существует других прямых, проходящих через точки A, B, C и параллельных прямым BC, AC, AB соответственно.

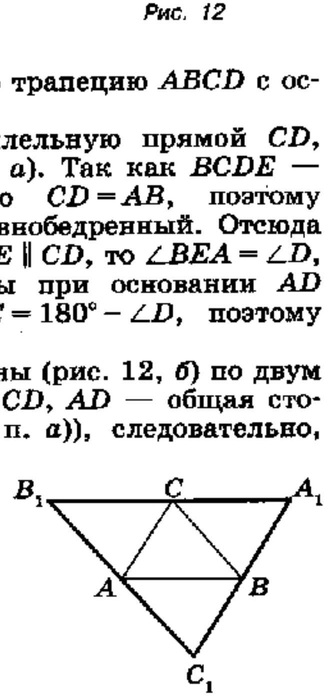


Рис. 13

397 (а). Дано: угол hk и два отрезка MN и M_1N_1 (рис. 14, *а*). Построить трапецию $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle hk$.

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена, т. е. искомая трапеция $ABCD$ построена (рис. 14, *б*). Нетрудно заметить, что по данным элементам легко построить треугольник ABD и тем самым будут построены вершины A, B и D трапеции $ABCD$. Для построения вершины C нужно провести через точку B прямую, параллельную

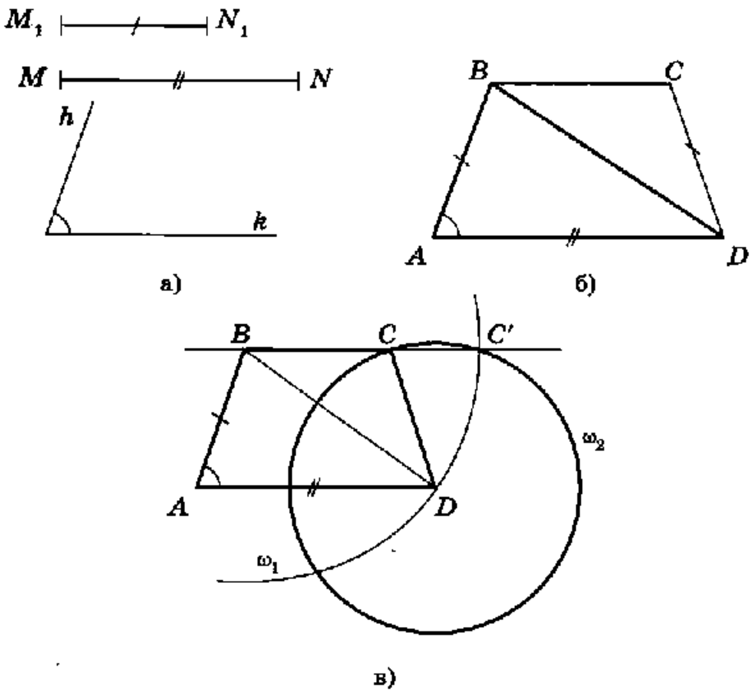


Рис. 14

прямой AD, и, пользуясь циркулем, на этой прямой построить точку C так, чтобы $DC = M_1N_1$.

Построение. 1) Строим треугольник ABD так, чтобы $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle hk$ (см. п. 39, задача 1).

2) Через точку B проведём прямую, параллельную прямой AD (задача 222). Для этого проведём две окружности: окружность ω_1 с центром B радиуса BD и окружность ω_2 с центром D радиуса AB. Пусть C' — точка пересечения этих окружностей, лежащая по ту же сторону от прямой AD, что и точка B (рис. 14, *в*). Тогда $BC' \parallel AD$ (так как $ABC'D$ — параллелограмм).

3) Окружность ω_2 пересекает прямую BC' ещё в одной точке — точке C. Соединив эту точку с точкой D, получим искомую трапецию $ABCD$.

Доказательство непосредственно следует из построения. В самом деле, по построению $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle hk$, $BC \parallel AD$ и $CD = AB$, так как CD — радиус окружности ω_2.

Исследование. Заметим, что в равнобедренной трапеции ни один из углов не может быть прямым. В самом деле, если, например, предположить, что на рисунке 14, *б* угол A прямой, то в соответствии с задачей 389 (а) угол D также прямой. Но тогда $AB \parallel CD$, что невозможно, так как боковые стороны трапеции не параллельны. Таким образом, если данный угол hk прямой, то задача не имеет решения. Если $\angle hk \neq 90°$, то описанное построение можно выполнить, поэтому при $\angle hk \neq 90°$ задача имеет решение. В этом случае данная задача имеет единственное решение (см. п. 39, задача 1). В самом деле, хотя и существует бесконечно много трапеций, удовлетворяющих условиям задачи, можно доказать, что все эти трапеции равны друг другу. Приведём доказательство этого утверждения, но подчеркнём, что оно не является обязательным для учащихся.

Пусть трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ удовлетворяют условиям задачи. Тогда $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$. Согласно задаче 389 (а) $\angle D = \angle D_1$. Наложим трапецию $ABCD$ на трапецию $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AD — с равной ей стороной A_1D_1, а вершины B и B_1, C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1D_1. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$, то сторона AB наложится на луч A_1B_1, а сторона DC — на луч D_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $DC = D_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона DC — со стороной D_1C_1, в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны.

420. Пусть $\triangle ABC$ — данный равнобедренный треугольник с основанием AC и BD — его биссектриса (рис. 15).

а) По теореме о биссектрисе равнобедренного треугольника (п. 18) $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Следовательно, точки A и C симметричны относительно прямой BD.

б) Возьмём произвольную точку M на основании AC. Пусть, например, точка M лежит между точками A и D (см. рис. 15). Отметим точку M_1 между точками D и C так, что $DM_1 = DM$. Очевидно, точка M_1 симметрична точке M относительно прямой BD. Итак, для каждой точки на основании AC симметричная ей относительно прямой BD точка также лежит на основании AC.

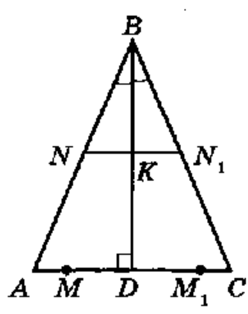


Рис. 15

в) Возьмём теперь произвольную точку N на одной из боковых сторон треугольника ABC, например на стороне AB (см. рис. 15). Отложим от вершины B на луче BC отрезок BN_1, равный отрезку BN. Так как $BN < AB$, то

$BN_1 < BC$ и точка N_1 лежит на стороне BC. Треугольник BNN_1 равнобедренный, BK — его биссектриса, следовательно, $NN_1 \perp BK$, $NK = N_1K$, и поэтому точки N и N_1 симметричны относительно прямой BD.

Мы доказали, что для каждой точки треугольника ABC точка, симметричная ей относительно прямой BD, также принадлежит этому треугольнику. Это и означает, что прямая BD — ось симметрии треугольника ABC.

427. Пусть прямые, проведённые через произвольную точку M основания BC данного равнобедренного треугольника ABC параллельно боковым сторонам, пересекают эти стороны в точках D и E (рис. 16). Легко доказать, пользуясь следствием 2^0 п. 33, что треугольники BMD и MCE равнобедренные, т. е. $MD = DB$ и $ME = EC$. Если P — периметр четырёхугольника $ADME$, то $P = AD + DM + ME + EA = AD + DB + EC + EA = AB + AC$.

440*. Пусть ABC — данный треугольник, AM — его медиана, точка D симметрична точке A относительно точки M (рис. 17). Докажем, что треугольники ABD и EAF равны. Так как $\triangle BMD = \triangle CMA$, то $BD = AC$ и $\angle 1 = \angle C$. Следовательно, $\angle ABD = \angle B + \angle 1 = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$. С другой стороны, $\angle EAF = 180° - \angle A$, поэтому $\angle ABD = \angle EAF$. Треугольники ABD и EAF равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = AE$, $BD = AC = AF$, $\angle ABD = \angle EAF$). Отсюда следует, что $EF = AD = 2AM$.

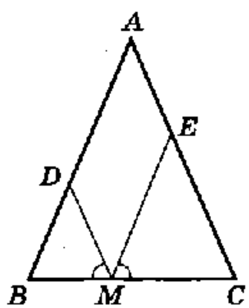


Рис. 16

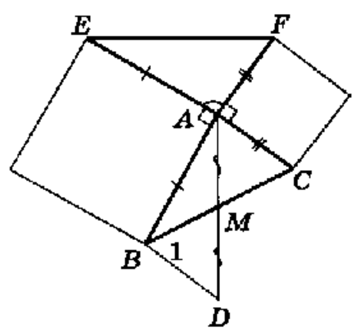


Рис. 17

ГЛАВА

VI Площадь *(14 ч)*

Существенной особенностью данного курса является сравнительно раннее введение понятия площади многоугольника. Это обеспечивает ряд методических преимуществ в построении курса, о которых будет сказано ниже.

С понятием площади и формулами для вычисления площадей некоторых многоугольников (треугольник, прямоугольник) учащиеся уже встречались в 5 и 6 классах. Назначение данной главы — расширить и углубить представления учащихся об измерении площадей, вывести формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции и, наконец, используя понятие площади, доказать одну из главных теорем геометрии — теорему Пифагора.

Учителю следует обратить особое внимание на нетрадиционную для школьного курса теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. На этой теореме основано доказательство признаков подобия треугольников в следующей главе. Кроме того, эта теорема позволяет решить большое число задач без использования теории подобия и тригонометрических формул, связывающих стороны и углы треугольника.

Примерное тематическое планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Площадь многоугольника	2	27—32	С-9
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	6	33—44	С-10, С-11, С-12
§ 3. Теорема Пифагора	3	45—50	С-13
Решение задач	2	27—50	С-14
Контрольная работа № 2	1	—	К-2

§ 1 Площадь многоугольника *(2 ч)*

Назначение параграфа — дать представление об измерении площадей многоугольников, рассмотреть основные свойства площадей и вывести формулы для вычисления площадей квадрата и прямоугольника. Этот материал служит основой для вывода всех остальных формул данной главы.

Перед тем как непосредственно приступить к изучению нового материала, желательно вспомнить понятие многоугольника как части плоскости, а также понятие равенства фигур, в частности многоугольников. Для этого можно использовать следующие устные задачи:

1. Через точку во внутренней области равностороннего треугольника проведены две прямые, параллельные двум сторонам треугольника. На какие фигуры разбивается этими прямыми данный треугольник?
2. На рисунке 18 $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 2AB$, AM — биссектриса угла BAD. Докажите, что часть отрезка AM, лежащая во внутренней области параллелограмма $ABCD$, равна части, лежащей во внешней области.

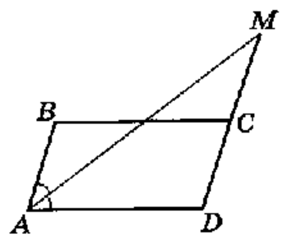


Рис. 18

Ввести понятие площади многоугольника и основные свойства площадей можно в форме короткой лекции с привлечением иллюстративного материала. При этом полезно отметить, что вывод формул для вычисления площадей различных многоугольников будет основан на двух свойствах площадей, аналогичных свойствам длин отрезков:

1^0. Равные многоугольники имеют равные площади.

2^0. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Эти свойства принимаются на основе наглядных представлений об измерении площадей.

Следует сказать также о понятиях равновеликих и равносоставленных многоугольников и о связи этих понятий.

Наряду с двумя основными свойствами важную роль играет в дальнейшем ещё одно свойство:

3^0. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Доказательство утверждения 3^0 является, пожалуй, самым трудным во всём курсе, и потому, как нам кажется, не нужно требовать от каждого ученика, чтобы он умел доказывать это утверждение. Именно поэтому п. 50 учебника, содержащий доказательство утверждения 3^0, отмечен звёздочкой. Это означает, что материал данного пункта не является обязательным (всего в учебнике «Геометрия. 7—9 классы» имеется три пункта, отмеченные звёздочкой). Учителю следует на конкретных примерах разъяснить свойство 3^0, а более подготовленным учащимся можно предложить изучить доказательство самостоятельно по учебнику. Трудность доказательства связана с тем, что наряду со случаем, когда сторона квадрата выражается конечной десятичной дробью, приходится рассматривать более сложный случай, когда сторона квадрата выражается бесконечной десятичной дробью (иррациональным числом). Вместе с тем это единственное место во всём курсе, где возникают трудности, связанные с иррациональными значениями величин. Одно из преимуществ раннего введения понятия площади состоит в том, что такого рода трудности удаётся легко обойти в главе «Подобные треугольники» при доказательстве теорем о признаках подобия.

Закрепить усвоение сведений о свойствах площадей можно в процессе решения задачи 445, а также задач типа:

3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найдите площади треугольников ABC и ABD.
4. Площадь прямоугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 19, равна Q. Найдите площадь треугольника AMD.
5. На рисунке 20 $ABCD$ — прямоугольник, точки E и F — середины его сторон AD и BC. Заштрихованный квадрат представляет собой единицу измерения площадей. Найдите площадь трапеции $KMNP$.

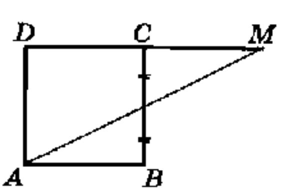


Рис. 19

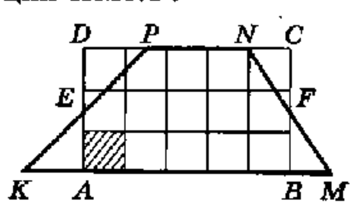


Рис. 20

Кроме того, на первом уроке рекомендуется решить задачи 449 (а, в), 450 (а, б), 451 (устно).

Дома: вопросы для повторения 1—3 (с. 133); задачи 447, 449 (б), 450 (в), 451 (записать решение).

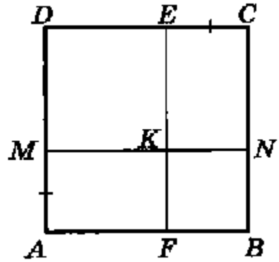


Рис. 21

На втором уроке перед выводом формулы площади прямоугольника полезно провести подготовительную работу, выполнив следующие задания:

6. Докажите, что два прямоугольника равны, если соответственно равны их смежные стороны.
7. На рисунке 21 $ABCD$ — квадрат, $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$. Найдите площадь четырёхугольника $AFKM$, если $AM = CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

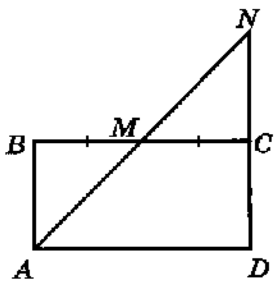


Рис. 22

При доказательстве теоремы о площади прямоугольника желательно иметь заранее заготовленный чертёж (см. рис. 181 учебника).

В классе рекомендуется решить задачи 452 (а, в), 453 (а, б).

Дома: вопрос для повторения 4 (с. 133); задачи 452 (б, г), 453 (в), 448.

В конце второго урока полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

На рисунке 22 $ABCD$ — прямоугольник, точка M — середина стороны BC. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 48 см, а сторона AD вдвое больше стороны AB. Найдите: а) площадь прямоугольника $ABCD$; б) площадь треугольника ADN.

Вариант II

На рисунке 23 $ABCD$ — прямоугольник, точка C — середина отрезка BF. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 46 см, а сторона BC на 5 см больше стороны AB. Найдите: а) площадь прямоугольника $ABCD$; б) площадь треугольника ABF.

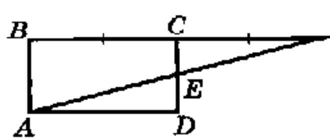


Рис. 23

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Периметр прямоугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 24, равен 44 см, а $DC : AD = 7 : 4$. Найдите площадь треугольника ABK, если $DE = FC = \frac{1}{2}EF$.

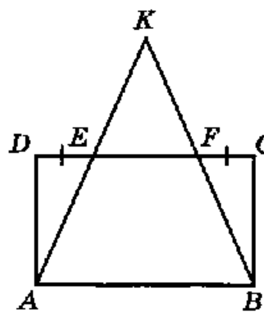


Рис. 24

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-9 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать и уметь формулировать** утверждения об основных свойствах площадей; **уметь объяснить**, какие многоугольники называются равновеликими и какие — равносоставленными и как связаны эти понятия; **уметь вывести формулу** площади прямоугольника, отмечая по ходу вывода, какое основное свойство площадей используется в том или ином месте; **уметь решать задачи** типа 447—454, 457.

§ 2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции *(6 ч)*

Назначение параграфа — опираясь на основные свойства площадей и теорему о площади прямоугольника, вывести формулы для вычисления площадей параллелограмма, треугольника и трапеции. Кроме того, рассмотреть теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, на которой основано доказательство ряда теорем из последующих разделов курса.

Материал этого параграфа можно распределить по урокам следующим образом: площадь параллелограмма — 1 урок, площадь треугольника — 2 урока, площадь трапеции — 1 урок. Оставшиеся два урока рекомендуется посвятить решению задач.

Перед выводом формулы площади параллелограмма полезно провести подготовительную работу, с тем чтобы напомнить учащимся основные свойства площадей и признаки равенства прямоугольных треугольников.

1. На рисунке 24 $ABCD$ — прямоугольник, $DE = CF = \frac{1}{2}EF$.

   Докажите, что площадь треугольника KEF в два раза больше площади треугольника BCF.

2. На рисунке 182 учебника отрезки BH и CK — высоты параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь этого параллелограмма, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle BAH = 30°$.

После доказательства теоремы о площади параллелограмма в классе рекомендуется решить задачи 459 (а) (устно), 459 (б, в), 464 (в).

Дома: вопрос для повторения 5 (с. 133); задачи 459 (г), 460, 464 (б).

В конце урока или в начале следующего урока желательно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

Стороны параллелограмма равны 10 см и 6 см, а угол между этими сторонами равен 150°. Найдите площадь этого параллелограмма.

Вариант II

Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведённые из вершины тупого угла, равны 4 см и 3 см. Найдите площадь этого параллелограмма.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 см и 6 см.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-10 из дидактических материалов.

Перед изучением теоремы о площади треугольника полезно устно по заготовленному заранее чертежу решить следующую задачу:

3. Смежные стороны параллелограмма $ABCD$, равные 8 см и 12 см, образуют угол в 30°. Найдите площади треугольников ABC и ABD.

В процессе решения этой задачи повторяются основные свойства площадей, формула площади параллелограмма, акцентируется внимание на том, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Доказательство теоремы о площади треугольника и следствий из неё можно предложить учащимся провести самостоятельно (без учебника или с помощью него).

В классе рекомендуется решить задачи 468 (а, г), 471 (а), 475.

Дома: вопрос для повторения 6 (с. 133); задачи 467, 468 (б, в), 471 (б), 474 (устно).

В основе доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, лежит следствие 2^0 из теоремы о площади треугольника. Поэтому именно на этом следствии желательно акцентировать внимание учащихся в процессе проверки домашнего задания (задача 474) и в процессе устного решения следующих задач:

4. На рисунке 25 CM — медиана треугольника ABC, CK — медиана треугольника ACM. Найдите отношения площадей:

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}}, \frac{S_{ACM}}{S_{BCK}}, \frac{S_{ACK}}{S_{BCK}}.$$

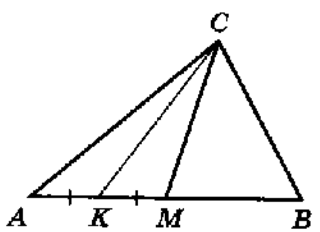


Рис. 25

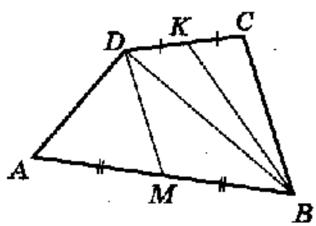


Рис. 26

5. На рисунке 26 точка M — середина стороны AB, K — середина стороны CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{MBKD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Доказательство теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, рекомендуется провести самому учителю.

На применение этой теоремы в классе можно решить следующие задачи:

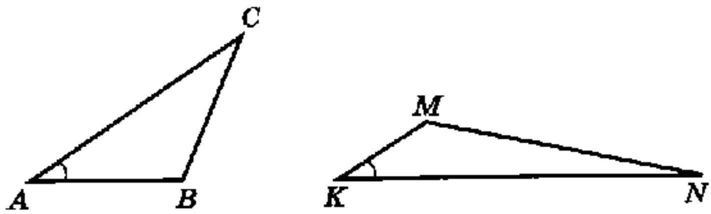


Рис. 27

6. (Устно). На рисунке 27 $\angle A = \angle K$, $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $KN = 7$ см, $KM = 2$ см. Найдите отношение $\frac{S_{ABC}}{S_{KMN}}$.

7. На рисунке 28 $OA = 8$ см, $OB = 6$ см, $OC = 5$ см, $OD = 2$ см, $S_{AOB} = 20$ см^2. Найдите S_{COD}.

8. Площадь одного равностороннего треугольника в три раза больше, чем площадь другого равностороннего треугольника. Найдите сторону второго треугольника, если сторона первого равна 1.

9. Задача 479 (б).

Дома: вопрос для повторения 7 (с. 133); задачи 469, 472, 479 (а).

В конце урока рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

На рисунке 29 $AO = OB$, $OC = 2OD$, $S_{AOC} = 12$ см^2. Найдите S_{BOD}.

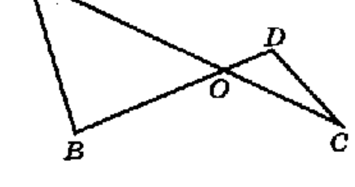


Рис. 28

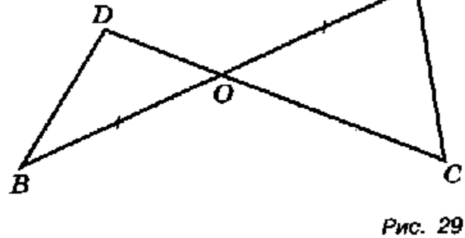


Рис. 29

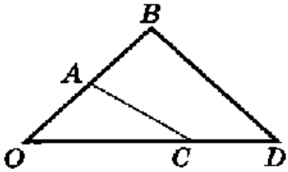


Рис. 30

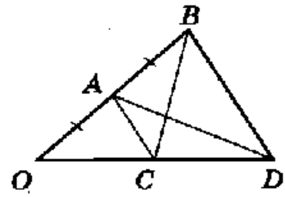


Рис. 31

Вариант II

На рисунке 30 $OB = OC$, $OD = 3OA$, $S_{AOC} = 16$ см^2. Найдите S_{BOD}.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

На рисунке 31 $OA = AB$, $AC \parallel BD$. Докажите, что $S_{OBC} = S_{OAD}$.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-11 из дидактических материалов.

Доказательство теоремы о площади трапеции можно предложить учащимся разобрать дома самостоятельно.

В классе рекомендуется решить задачу 480 (а, в).

Дома: вопрос для повторения 8 (с. 133); задачи 480 (б), 518 (а).

В конце урока можно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

Высота и основания трапеции относятся как 5 : 6 : 4. Найдите меньшее основание трапеции, если её площадь равна 88 см^2.

Вариант II

Высота трапеции равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите высоту трапеции, если её площадь равна 54 см^2.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Основания равнобедренной трапеции 12 см и 16 см, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-12 из дидактических материалов.

Уроки, отведённые на решение задач к § 2, учитель может использовать по своему усмотрению (например, один из уроков можно провести до изучения теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). На одном из этих уроков обязательно следует разобрать задачу 476 (теорема о площади ромба) и закрепить усвоение формулы площади ромба в процессе решения задач типа 476, 477, 478.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать и уметь выводить формулы** площадей параллелограмма, треугольника и трапеции; **уметь формулировать и доказывать** теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу; **уметь применять** изученные формулы при решении задач типа 459—464, 468—472, 474, 476—480; в ходе изучения темы учащиеся должны **совершенствовать умение** самостоятельно усваивать новую информацию с помощью учебника и на основе накопленных геометрических знаний.

§ 3 Теорема Пифагора *(3 ч)*

Назначение параграфа — изучить одну из важнейших теорем геометрии — теорему Пифагора, а также обратную ей теорему и вывести с помощью теоремы Пифагора формулу Герона для площади треугольника. Теорема Пифагора позволяет существенно расширить круг задач, решаемых в курсе геометрии. На ней в значительной мере базируется дальнейшее изложение теоретического курса.

Перед доказательством теоремы Пифагора желательно провести подготовительную работу по готовым чертежам.

1. По данным рисунка 32 найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
2. По данным рисунка 33, *а*, *б* найдите угол β.

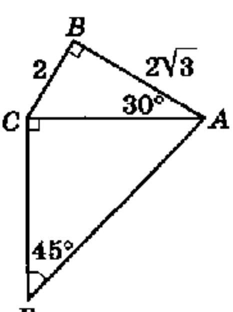


Рис. 32

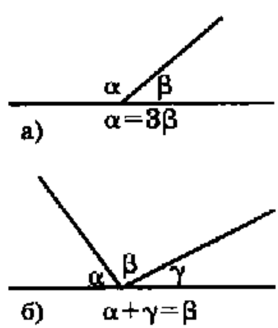


Рис. 33

3. По данным рисунка 34 докажите, что четырёхугольник $KMNP$ — квадрат. (Эта задача особенно важна, так как такая же фигура, как на рисунке 34, используется в доказательстве теоремы Пифагора.)

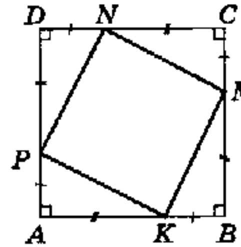


Рис. 34

Доказательство теоремы Пифагора основано на формулах площадей прямоугольного треугольника и квадрата. Следует отметить, что исторически теорема Пифагора всегда связывалась с понятием площади и формулировалась на языке площадей. Отметим также, что в главе VII даётся другое доказательство теоремы Пифагора, основанное на пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике (задача 578 с решением).

Для усвоения теоремы Пифагора после её доказательства в классе решаются задачи 483 (а, б, г), 484 (а, в, д), 485.

Дома: вопрос для повторения 9 (с. 133); задачи 483 (в), 484 (б, г, е), 486 (а).

Перед доказательством теоремы, обратной теореме Пифагора, необходимо напомнить учащимся понятие обратной теоремы и акцентировать их внимание на том, что утверждение, обратное истинному утверждению, не всегда верно. С этой целью можно предложить учащимся сформулировать утверждения, обратные приведённым ниже, и ответить на вопрос: верно ли сформулированное обратное утверждение?

а) Если углы вертикальные, то они равны.

б) Если четырёхугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

в) Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

г) Если четырёхугольник является трапецией, то две его стороны параллельны.

После этого упражнения можно предложить учащимся самим сформулировать теорему, обратную теореме Пифагора. Доказательство теоремы рекомендуется провести самому учителю, ему же следует рассказать также о пифагоровых и египетских треугольниках.

В классе решаются задачи 488 (а), 498 (а, д, е), 517.

Дома: вопросы для повторения 10, 11 (с. 133); задачи 488 (б), 493, 498 (б, в, г, ж).

Третий урок можно посвятить выводу формулы Герона и решению задач на применение теоремы Пифагора и обратной ей теоремы. В конце урока желательно провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

В прямоугольной трапеции основания равны 22 см и 6 см, а большая боковая сторона — 20 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант II

В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 7 см и 25 см, а меньшее основание равно 2 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Диагональ AC прямоугольной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне CD и составляет угол в 60° с основанием AD. Найдите площадь трапеции, если $AD = 24$ см.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-13 из дидактических материалов.

Дома: вопрос для повторения 12 (с. 133), оставшиеся нерешёнными задачи к § 1—3.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать теорему Пифагора** и обратную ей теорему, **выводить формулу Герона, применять их** при решении задач типа 483—499.

Решение задач (2 ч)

Назначение этих уроков — закрепить навыки в решении задач по теме «Площадь» и подготовиться к контрольной работе. Материал к этим урокам подбирается из нерешённых задач к § 1—3, а также из дополнительных задач к главе VI.

Задачу 489 желательно решить на первом из этих уроков (вывод формулы площади равностороннего треугольника).

На втором уроке рекомендуется провести итоговую *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $BC = 13$ см, а высота BD отсекает на стороне AC отрезок DC, равный 12 см. Найдите площадь треугольника ABC и высоту, проведённую к стороне BC.

2. Одна из диагоналей ромба на 4 см больше другой, а площадь ромба равна 96 $см^2$. Найдите стороны ромба.

Вариант II

1. В треугольнике ABC $\angle B = 45°$, высота AN делит сторону BC на отрезки $BN = 8$ см и $NC = 6$ см. Найдите площадь треугольника ABC и сторону AC.
2. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 20 см, а диагонали относятся как $3 : 4$.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 75°$, высота BD равна 6 см. Найдите площадь треугольника ABC.
2. Высота BK ромба $ABCD$ делит сторону AD на отрезки $AK = 6$ см и $KD = 4$ см. Найдите площадь ромба и его диагонали.

Контрольная работа № 2 *(1 ч)*

Вариант I

1. Смежные стороны параллелограмма равны 32 см и 26 см, а один из его углов равен 150°. Найдите площадь параллелограмма.
2. Площадь прямоугольной трапеции равна 120 $см^2$, а её высота равна 8 см. Найдите все стороны трапеции, если одно из оснований больше другого на 6 см.
3. На стороне AC данного треугольника ABC постройте точку D так, чтобы площадь треугольника ABD составила одну треть площади треугольника ABC.

Вариант II

1. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой и равна 9 см. Найдите стороны этого параллелограмма, если его площадь равна 108 $см^2$.
2. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AB = 12$ см, $BC = 14$ см, $AD = 30$ см, $\angle B = 150°$.
3. На продолжении стороны KN данного треугольника KMN постройте точку P так, чтобы площадь треугольника NMP была в два раза меньше площади треугольника KMN.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Стороны параллелограмма равны 12 см и 8 см, а угол между высотами, проведёнными из вершины тупого угла, равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.
2. Середина M боковой стороны CD трапеции $ABCD$ соединена отрезками с вершинами A и B. Докажите, что

площадь треугольника ABM в два раза меньше площади данной трапеции.

3. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC, причём $AB_1 = \frac{1}{3}AC$, $CA_1 = \frac{1}{3}CB$, $BC_1 = \frac{1}{3}BA$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 27 см^2.

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты контрольной работы К-2 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.
2. Площадь прямоугольника равна 75 см^2. Найдите стороны этого прямоугольника, если одна из них в три раза больше другой.
3. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 5 см, а угол между диагоналями равен 60°.

Вариант II

1. Сформулируйте теорему о площади параллелограмма.
2. Площадь параллелограмма равна 90 см^2. Найдите высоту параллелограмма, проведённую к стороне, равной 12 см.
3. Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 14 см, а один из углов равен 60°.

Вариант III

1. Сформулируйте теорему о площади треугольника.
2. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 8 см и 4,8 см, а высота, проведённая к стороне AB, равна 6 см. Найдите высоту, проведённую к стороне BC.
3. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна 12 см.

Вариант IV

1. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
2. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD = 20$ см, $BC = 4$ см, $AB = 16$ см и $\angle A = 30°$.
3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 8 см и 12 см, а боковая сторона — 10 см.

Вариант V

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 12 см и 16 см.
3. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см.

Вариант VI

1. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 6 см, 8 см и 10 см.
3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD = 12$ см, $BC = 6$ см, $CD = 5$ см, $AC = 13$ см.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы VI

466. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $BD = AD$ (рис. 35). Тогда угол A острый, так как треугольник ABD равнобедренный. По условию $\angle A = 45°$.

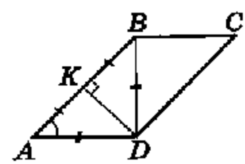


Рис. 35

1. Треугольник ABD равнобедренный, следовательно, $\angle ABD = 45°$, и поэтому $\angle ADB = 90°$. По условию $AB = 15{,}2$ см.
2. Высота DK равнобедренного треугольника ADB является медианой, поэтому $DK = \frac{1}{2}AB = 7{,}6$ см (см. задачу 404).
3. $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot DK = 15{,}2 \cdot 7{,}6 = 115{,}52$ (см^2).

478. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, $AC \perp BD$, а O — точка пересечения диагоналей (рис. 36).

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}.$$

Отрезки BO и DO — высоты треугольников ABC и ADC, поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO, \quad S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD.$$

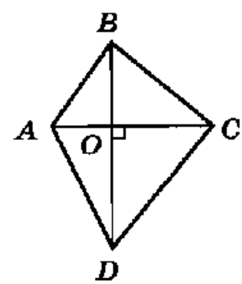


Рис. 36

Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

489. 1. Проведём высоту BD данного равностороннего треугольника ABC, в котором $AB = a$. Высота BD является медианой треугольника ABC, поэтому $AD = \frac{a}{2}$.

2. Применив теорему Пифагора к треугольнику ABD, получим

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

3. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

496. 1. Пусть $AD = BC = x$. Тогда $BD = 3 - x$ (рис. 37).

2. По теореме Пифагора для треугольника BCD

$$x^2 = (3 - x)^2 + (\sqrt{3})^2, \text{ откуда } x = 2.$$

3. По теореме Пифагора для треугольника ACD

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} \text{ (см)}.$$

497. Пусть диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой (рис. 38). По теореме Пифагора для треугольника ABD

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(AB + AD)(AB - AD)}.$$

Ясно, что $AB + AD$ есть полупериметр параллелограмма $ABCD$, поэтому $BD = \sqrt{25 \cdot 1} = 5$ (см).

504. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB = 29$ см, ON — перпендикуляр, проведённый из точки O пересечения диагоналей к стороне AD, $AN = 33$ см, $ND = 12$ см (рис. 39).

1. Проведём высоту BM данного параллелограмма. Так как $BO = OD$ и $BM \parallel ON$, то $MN = ND$ (см. задачу 384) и, следовательно,

$$AM = AN - NM = 33 - 12 = 21 \text{ (см)}.$$

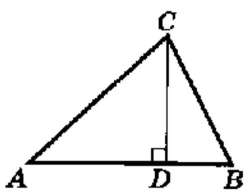


Рис. 37

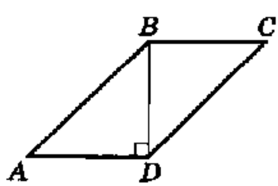


Рис. 38

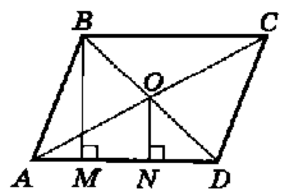


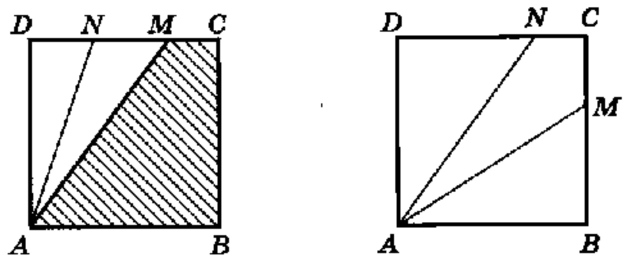
Рис. 39

2. Применив теорему Пифагора к треугольнику ABM, найдём высоту BM:

$$BM = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{8 \cdot 50} = 20 \text{ (см)}.$$

3. $S_{ABCD} = AD \cdot BM = 45 \cdot 20 = 900$ (см^2).

506. При решении этой задачи следует учесть, что искомые прямые не могут пересечь одну и ту же сторону квадрата, так как в этом случае площадь одной из трёх указанных в задаче фигур (четырёхугольник $ABCM$ на рисунке 40, *а*) больше $\frac{1}{2}S$, где S — площадь квадрата.



а) б)

Рис. 40

Поэтому искомые прямые, проведённые через вершину A, пересекают стороны квадрата $ABCD$ в точках M и N так, что одна из этих точек, например точка M, лежит на стороне BC, а другая — на стороне DC (рис. 40, *б*). Пусть $AB = a$, $BM = x$. Тогда по условию

$$S_{ABM} = \frac{1}{3}S = \frac{a^2}{3}, \text{ т. е. } \frac{1}{2}ax = \frac{1}{3}a^2,$$

откуда $x = \frac{2}{3}a$.

Итак, $BM = \frac{2}{3}BC$. Аналогично $DN = \frac{2}{3}DC$.

508*. Пусть D — произвольная точка на основании AC равнобедренного треугольника ABC, а DM и DN — перпендикуляры, проведённые из этой точки к прямым AB и CB (рис. 41).

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot DM + \frac{1}{2}BC \cdot DN = \frac{1}{2}AB(DM + DN).$$

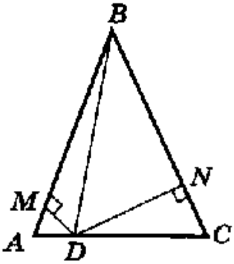


Рис. 41

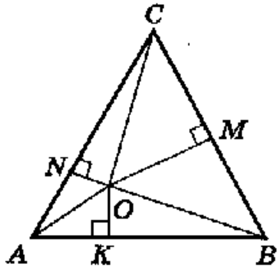


Рис. 42

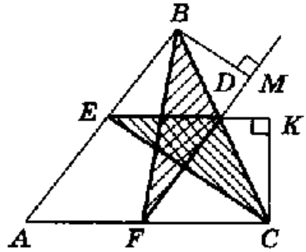


Рис. 43

Отсюда следует, что $DM + DN = \frac{2S_{ABC}}{AB}$, т. е. сумма $DM + DN$ не зависит от выбора точки D.

509. Пусть O — произвольная точка, лежащая внутри равностороннего треугольника ABC ($AB = BC = CA = a$), и OK, OM и ON — перпендикуляры к сторонам этого треугольника (рис. 42). Тогда

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{1}{2}(OK \cdot AB + OM \cdot BC + ON \cdot AC) =$$

$$= \frac{a}{2}(OK + OM + ON).$$

Отсюда получаем

$$OK + OM + ON = \frac{2S_{ABC}}{a},$$

т. е. сумма $OK + OM + ON$ не зависит от выбора точки O.

510*. Пусть BM — высота треугольника BDF, CK — высота треугольника CDE (рис. 43). Заметим, что BM и CK равны высотам параллелограмма $AEDF$, поэтому

$$S_{BDF} = \frac{1}{2}S_{AEDF}, \quad S_{CDE} = \frac{1}{2}S_{AEDF},$$

и, следовательно,

$$S_{BDF} = S_{CDE}.$$

511. а) Треугольники ABD и ACD имеют равные высоты BH и CL (рис. 44) и общее основание AD, следовательно, $S_{ABD} = S_{ACD}$.

б) $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$, $S_{ACD} = S_{CDO} + S_{AOD}$. Но по доказанному в п. а) $S_{ABD} = S_{ACD}$, поэтому $S_{ABO} = S_{CDO}$.

в) Углы 1 и 2 равны, поэтому $\frac{S_{ABO}}{S_{CDO}} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD}$.

По доказанному в п. б) $S_{ABO} = S_{CDO}$, следовательно, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

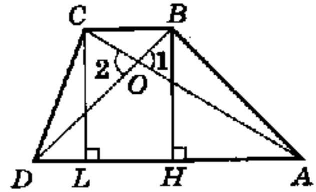


Рис. 44

512*. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = a$, $BC = b$, а EF — указанный в условиях задачи отрезок (рис. 45).

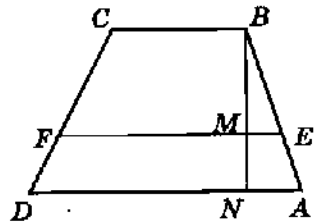


Рис. 45

Высота BN трапеции пересекает этот отрезок в точке M. Пусть $EF = x$, $BM = h_1$, $MN = h_2$. По условию $S_{EBCF} = S_{AEFD}$, и, значит, $S_{ABCD} = 2S_{EBCF}$. Запишем эти равенства, используя формулу площади трапеции:

$$\frac{b+x}{2}h_1 = \frac{a+x}{2}h_2,$$

$$\frac{a+b}{2}(h_1 + h_2) = (b+x)h_1.$$

Разделим оба уравнения на h_1 и положим $\frac{h_2}{h_1} = y$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

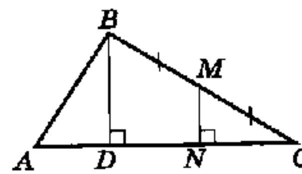


Рис. 46

$$\begin{cases} b + x = (a+x)y \\ (a+b)(1+y) = 2(b+x). \end{cases}$$

Выразим y из первого уравнения и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$(a+b)\left(1 + \frac{b+x}{a+x}\right) = 2(b+x).$$

Отсюда находим:

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

516. Проведём высоту BD данного треугольника ABC (рис. 46).

1. Точка M — середина стороны BC, $MN \parallel BD$, следовательно, $DN = NC$ (см. задачу 384).
2. В треугольнике BCD $BC = 34$ см, $DC = 2NC = 30$ см, следовательно,

$$BD = \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{64 \cdot 4} = 16 \text{ (см)}.$$

3. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}40 \cdot 16 = 320$ (см^2).

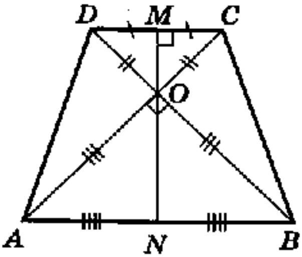


Рис. 47

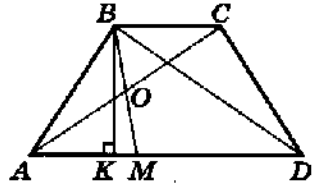


Рис. 48

520. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($AB + CD = 2a$), а MN — высота, проведённая через точку O пересечения диагоналей (рис. 47).

1. Так как углы трапеции $ABCD$ при основании равны (см. задачу 388), то $\triangle ABC = \triangle BAD$, поэтому $\angle OAB = \angle OBA$. Отсюда следует, что треугольник AOB равнобедренный и, следовательно, в силу равенства $AC = BD$ (см. задачу 388) треугольник COD также равнобедренный.
2. По условию задачи $AC \perp BD$, т. е. треугольники AOB и COD прямоугольные, поэтому $OM = \frac{1}{2}CD$, $ON = \frac{1}{2}AB$ (задача 404).
3. $MN = MO + ON = \frac{1}{2}(CD + AB) = a.$

   Отсюда получаем

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} MN = a^2.$$

521. Используя теорему Пифагора, выразим AB^2, BC^2, CD^2, AD^2 через AO, BO, CO, DO, где O — точка пересечения прямых AC и BD, и убедимся в том, что

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2.$$

522. Пусть BK — высота данной трапеции $ABCD$, точка O — середина диагонали AC (рис. 48).

1. $\triangle AOM = \triangle COB$ по стороне и двум прилежащим углам ($AO = CO$ по условию, $\angle AOM = \angle COB$ — вертикальные углы, $\angle MAO = \angle BCO$ — накрест лежащие углы). Следовательно, $AM = BC = 5$ (см).
2. $MD = AD - AM = 17 - 5 = 12$ (см).
3. $AK = \frac{AD - BC}{2} = 6$ (см).

4. Найдём высоту BK как катет прямоугольного треугольника ABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}.$$

5. $S_{BMD} = \frac{1}{2} MD \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$

523. Пусть $ABCD$ и $CKMN$ — данные квадраты, $AB = CK = a$ (рис. 49). Общей частью данных квадратов является четырёхугольник $CKFD$.

$$S_{CKFD} = S_{ACD} - S_{AKF}.$$

Далее учесть, что

$$S_{ACD} = \frac{a^2}{2}, \quad S_{AKF} = \frac{AK^2}{2} = \frac{(AC - KC)^2}{2}.$$

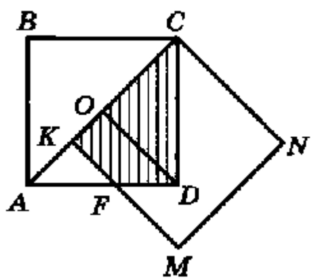


Рис. 49

ГЛАВА

VII Подобные треугольники *(19 ч)*

Понятие подобия является одним из важнейших в курсе планиметрии. Учащиеся знакомы с реальными предметами, дающими наглядное представление о подобных фигурах (географические карты, фотографии, модели автомобилей, кораблей, самолётов и т. д.).

Основное внимание в главе уделено подобным треугольникам. Определение подобных треугольников даётся не на основе преобразования подобия, а через равенство углов и пропорциональность сходственных сторон.

На основе теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, весьма просто доказываются признаки подобия треугольников. Они широко используются в курсе геометрии.

Кроме того, материал, связанный с подобием, позволяет содержательно реализовать межпредметные связи с алгеброй (пропорциональность, уравнения, квадратные корни) и с физикой (например, геометрическая оптика). В конце главы вводятся понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Примерное тематическое планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Определение подобных треугольников	2	51—54	С-15, С-16
§ 2. Признаки подобия треугольников	5	55—60	С-17, С-18
Контрольная работа № 3	1	—	К-3
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	7	61—70	С-19, С-20, С-21

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	3	71—77	С-22, С-23
Контрольная работа № 4	1	—	С-24, К-4

§ 1 Определение подобных треугольников *(2 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятие пропорциональных отрезков и, опираясь на него, дать определение подобных треугольников.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: пропорциональные отрезки и свойство биссектрисы треугольника (задача 535) — 1 урок; определение подобных треугольников и теорема об отношении площадей подобных треугольников — 1 урок.

На первом уроке, перед тем как приступить к изучению нового материала, полезно повторить свойства пропорций. После введения понятия пропорциональных отрезков можно решить задачи 533 (устно), 534 (а, б), а затем рекомендуется разобрать в классе задачу 535 и показать применение рассмотренного свойства биссектрисы треугольника на примере задач 536 (а), 538, 540.

Дома: вопросы для повторения 1 и 2 (с. 158); задачи 534 (в), 535, 536 (б), 537, 539.

На втором уроке после определения подобных треугольников можно решить задачи 541 (устно), 542.

Перед доказательством теоремы об отношении площадей подобных треугольников полезно ещё раз вспомнить теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу (п. 53). Это можно сделать в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 50 $AN = BN$, $CM = 5$ см, $MB = 2$ см. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BMN равна 7 см^2.

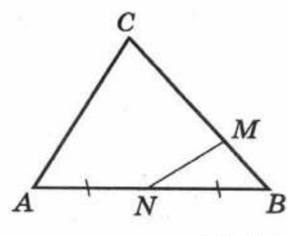


Рис. 50

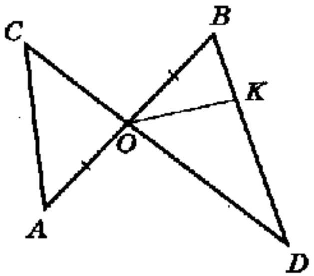


Рис. 51

2. На рисунке 51 $AO = OB$, $BK : KD = 1 : 3$, $CO : OD = 2 : 3$. Найдите S_{BOK}, если $S_{AOC} = 4$ см^2.

Далее рекомендуется решить задачи 544, 545, 548.

Дома: вопросы для повторения 3, 4 (с. 158); задачи 543, 546, 547, 549.

При наличии времени на втором уроке рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

В подобных треугольниках ABC и KMN равны углы B и M, C и N, $AC = 3$ см, $KN = 6$ см, $MN = 4$ см, $\angle A = 30°$. Найдите: а) BC, $\angle K$; б) отношение площадей треугольников ABC и KMN; в) отношение, в котором биссектриса угла C делит сторону AB.

Вариант II

В подобных треугольниках PQR и ABC равны углы Q и B, R и C, $PQ = 3$ см, $PR = 4$ см, $AB = 6$ см, $\angle A = 40°$. Найдите: а) AC, $\angle P$; б) отношение площадей треугольников PQR и ABC; в) отношение, в котором биссектриса угла P делит сторону RQ.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 12$ см, CD — высота. Докажите, что треугольник ACD подобен треугольнику ABC, найдите отношение их площадей и отрезки, на которые биссектриса угла A делит катет BC.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-16 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать и уметь чётко формулировать** определения пропорциональных отрезков и подобных треугольников; уметь

формулировать и доказывать утверждение о свойстве биссектрисы треугольника (задача 535) и теорему об отношении площадей подобных треугольников; **решать задачи** типа 534—538, 541, 542, 544—548.

§ 2 Признаки подобия треугольников *(5 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть три признака подобия треугольников и сформировать у учащихся навыки применения этих признаков при решении задач. Дальнейшее применение признаки подобия треугольников получат в § 3 и 4.

Особое внимание следует обратить на первый признак подобия треугольников, так как именно он лежит в основе доказательства двух других признаков, а кроме того, чаще других применяется при решении задач.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: первый признак подобия треугольников — 2 урока; второй и третий признаки подобия треугольников — 2 урока; решение задач к § 2 — 1 урок. На следующем уроке, после изучения § 2, рекомендуется провести контрольную работу № 3.

Перед тем как приступить к изучению первого признака подобия треугольников, полезно повторить понятие пропорциональных отрезков и теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Это можно сделать в процессе устного решения задач по заготовленным чертежам.

1. На рисунке 52 $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $CB_4 = 12$ см, $S_{A_4B_4C} = 32$ см^2. Найдите: а) B_1B_2, B_2B_4; б) $S_{A_3B_3C}$.
2. На рисунке 53 AD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. Найдите: а) BD и CD; б) $S_{ACD} : S_{ABD}$.

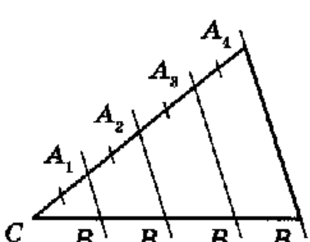


Рис. 52

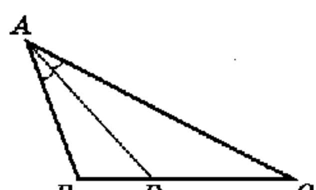


Рис. 53

3. На рисунке 54 $S_{ABC} = 36$ см^2, $AN : NC = 3 : 1$, $BM : MC = 2 : 1$, $AK = KB$. Найдите: а) S_{CMN}; б) S_{AKN}; в) S_{BMNK}.

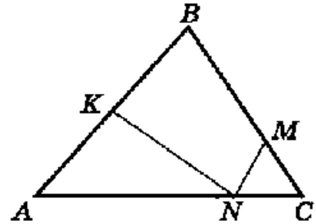


Рис. 54

Доказательство теоремы о первом признаке подобия треугольников рекомендуется провести самому учителю.

В классе на первом и втором уроках можно решить задачи 550, 551 (а), 553 (а), 561, 556, 557 (а, б).

Дома: вопрос для повторения 5 (с. 158); задачи 551 (б), 552 (а), 553 (б), 557 (в), 558 (обратите особое внимание на эту задачу).

На втором уроке можно провести небольшую (10 мин) *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

На рисунке 55 $\angle N = \angle A$, $BC = 12$ см, $CM = 6$ см, $CN = 4$ см. Найдите AC.

Вариант II

На рисунке 56 $BC \perp AC$, $EF \perp AB$, $BC = 12$ см, $AE = 10$ см, $EF = 6$ см. Найдите AB.

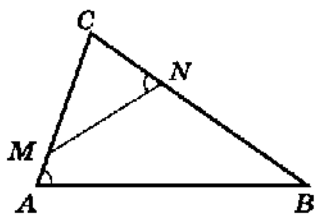


Рис. 55

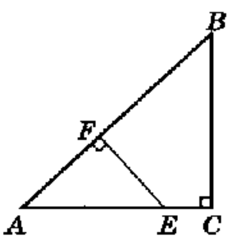


Рис. 56

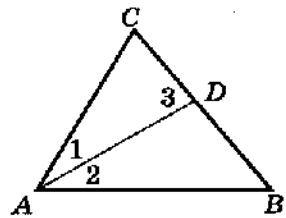


Рис. 57

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

На рисунке 57 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$ см, $BC = 9$ см. Найдите AC.

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты самостоятельной работы С-17 из дидактических материалов.

Доказательства теорем, выражающих второй и третий признаки подобия треугольников, также желательно провести самому учителю. Учащиеся записывают в тетради план-конспект доказательства каждой теоремы.

На применение второго и третьего признаков подобия треугольников в классе рекомендуется решить задачи:

4. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если: а) катеты одного из них пропорциональны катетам другого; б) гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.
5. На рисунке 58 $OA = 6$ см, $AC = 15$ см, $OB = 9$ см, $BD = 5$ см, $AB = 12$ см. Найдите CD.
6. На рисунке 59 $OA = 15$ см, $OD = 5$ см, $CO : OB = 1 : 3$, $AB + CD = 24$ см. Найдите AB и CD.

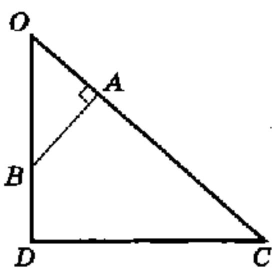


Рис. 58

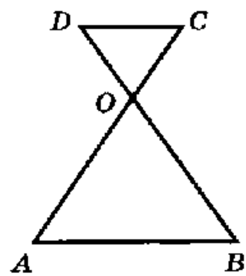


Рис. 59

Кроме того, можно решить задачи 560 (а), 613 (а).

Дома: вопросы для повторения 6, 7 (с. 158—159); задачи 559, 560 (б), 613 (б).

На последнем уроке в классе решаются задачи на применение признаков подобия треугольников (по выбору): 552 (б), 554, 555 (а), 562, 563 (а), 611.

Дома: 552 (в), 553 (в), 555 (б), 563 (б), 605.

В конце урока рекомендуется провести *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Высота CD прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на части $AD = 16$ см и $BD = 9$ см. Докажите, что $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, и найдите высоту CD.
2. Точки M и N лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, $AC = 16$ см, $BC = 12$ см, $CM = 12$ см, $CN = 9$ см. Докажите, что $MN \parallel BC$.

Вариант II

1. Высота CD прямоугольного треугольника ABC отсекает от гипотенузы AB, равной 9 см, отрезок AD, равный 4 см. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, и найдите AC.
2. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $AO = 18$ см, $OB = 15$ см, $OC = 12$ см, $OD = 10$ см. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) делит её на два подобных треугольника. Найдите S_{ABCD}, если $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $AC = 15$ см.
2. Угол B треугольника ABC в два раза больше угла A. Биссектриса угла B делит сторону AC на части $AD = 6$ см и $CD = 3$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельной работы С-18 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** три теоремы о признаках подобия треугольников и **применять** их при решении задач типа 550—555, 559—562, а также **знать** утверждения, сформулированные в задачах 556, 558, и уметь применять их при решении задач типа 557.

Контрольная работа № 3 *(1 ч)*

Вариант I

1. На рисунке 60 $AB \parallel CD$. а) Докажите, что $AO : OC = BO : OD$. б) Найдите AB, если $OD = 15$ см, $OB = 9$ см, $CD = 25$ см.
2. Найдите отношение площадей треугольников ABC и KMN, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см, $KM = 10$ см, $MN = 15$ см, $NK = 20$ см.

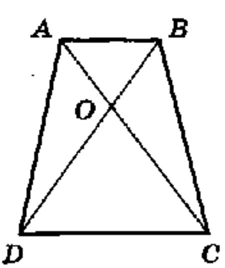


Рис. 60

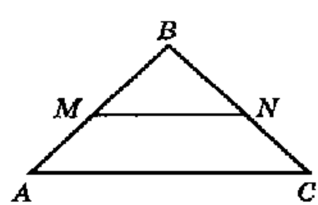


Рис. 61

Вариант II

1. На рисунке 61 $MN \parallel AC$. а) Докажите, что $AB \cdot BN = CB \cdot BM$. б) Найдите MN, если $AM = 6$ см, $BM = 8$ см, $AC = 21$ см.
2. Даны стороны треугольников PQR и ABC: $PQ = 16$ см, $QR = 20$ см, $PR = 28$ см и $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 21$ см. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Докажите, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений боковых сторон.
2. Даны отрезок AB и параллельная ему прямая a. Воспользовавшись утверждением, доказанным в задаче 1, разделите отрезок AB пополам при помощи одной линейки.

Можно использовать также задачи из вариантов контрольной работы К-3, содержащихся в дидактических материалах.

§ 3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач *(7 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть разнообразные применения подобия треугольников: при доказательстве новых утверждений, при решении задач, и в том числе задач на построение с помощью циркуля и линейки (метод подобия), в измерительных работах на местности; выработать у учащихся навыки активного использования теории подобных треугольников в различных приложениях.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: теорема о средней линии треугольника и свойство медиан треугольника — 2 урока; теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и деление отрезка в данном отношении — 2 урока; решение задач на построение методом подобия — 2 урока; измерительные работы на местности, понятие о подобии произвольных фигур — 1 урок.

В начале первого урока полезно повторить с учащимися второй признак подобия треугольников и познакомить их с идеей доказательства теоремы о средней линии треугольника, решив устно следующие задачи по заготовленным чертежам:

1. На рисунке 60 $AO : OC = BO : OD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.
2. На рисунке 61 точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC. Докажите, что $MN \parallel AC$.

После этого нужно дать определение средней линии треугольника и сформулировать теорему о средней линии треугольника. Доказательство теоремы можно предложить учащимся провести самостоятельно. На применение этой теоремы в классе рекомендуется решить задачи 564 (устно), 567. О свойстве медиан треугольника (задача 1 из § 3) целесообразно рассказать учителю самому, а затем учащиеся решают (на доске и в тетрадях) задачу 570.

Дома: вопросы для повторения 8, 9 (с. 159); задачи 565, 566, 571.

На следующем уроке усвоение изученного материала закрепляется в процессе решения устных задач.

3. На рисунке 62 $ABCD$ — трапеция: $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $BM = MK$, $CN = NK$, $BC = 6$ см. Найдите PQ.
4. На рисунке 63 отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что: а) $S_{AOC_1} = S_{BOC_1}$; б) $S_{AOB} = 2S_{A_1OB}$; в) $S_{AOC_1} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Рис. 62

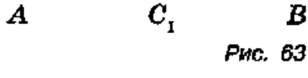


Рис. 63

Кроме того, в классе рекомендуется решить задачи 568 (а), 617.

Дома: задачи 568 (б), 618.

В конце урока можно провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

Площадь ромба равна 48 см^2. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного ромба.

Вариант II

Площадь прямоугольника равна 36 см^2. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного прямоугольника.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Площадь равнобедренной трапеции равна 40 см^2. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данной трапеции.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-19 из дидактических материалов.

Перед рассмотрением задачи 2 (п. 65) о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике полезно ввести понятие среднего геометрического (среднего пропорционального) двух отрезков и далее устно решить следующие задачи:

5. Найдите длину среднего геометрического отрезков AB и CD, если $AB = 8$ см, $CD = 18$ см.
6. Найдите длины отрезков KL и MN, если один из них в четыре раза больше другого, а длина их среднего пропорционального равна 12 см.

Изучение п. 65 можно организовать следующим образом: устно по заготовленному чертежу (рис. 64) доказать подобие треугольников ABC и ACD, ABC и CBD, CBD и ACD, а затем как следствия из доказанного вывести утверждения 1^0 и 2^0 п. 65.

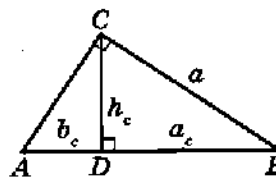


Рис. 64

Далее в классе рекомендуется решить задачи 572 (а, в), 573 (устно), 574 (а), 575 и разобрать приведённое в учебнике решение задачи 578.

Дома: вопросы для повторения 10, 11 (с. 159); задачи 572 (б), 574 (б), 576.

Замечания. 1. Задачу 574 (а) полезно решить двумя способами: с помощью теорем о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и с помощью формулы площади прямоугольного треугольника.

2. Желательно, чтобы решение задачи 578 (доказательство теоремы Пифагора) учащиеся законспектировали в своих тетрадях.

На следующем уроке в классе можно решить задачи 577, 584, 585 (а, б), 614.

Перед тем как разобрать задачу 584 (деление отрезка в данном отношении), полезно вспомнить задачу 556, выполнив устно следующее задание:

7. На рисунке 65 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. По данным рисунка найдите x и y.

Дома: задачи 585 (в), 607, 623 (с предварительным комментарием учителя).

На следующем уроке рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*.

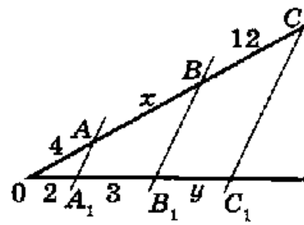


Рис. 65

Самостоятельная работа

Вариант I

1. На рисунке 64 $BD = 16$ см, $CD = 12$ см. Найдите AC, BC, AB, AD.
2. Начертите отрезок и разделите его в отношении 2 : 7.

Вариант II

1. На рисунке 64 $AC = 3$ см, $CD = \sqrt{8}$ см. Найдите AB, BC, AD, BD.
2. Начертите отрезок и разделите его в отношении 5 : 4.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а высота, проведённая к ней, равна 12 см. Найдите катеты треугольника и отрезки, на которые гипотенуза делится проведённой к ней высотой.
2. Начертите произвольный треугольник ABC и постройте отрезок PQ, удовлетворяющий условию $\frac{PQ}{AB} = \frac{BC}{AC}$.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-20 из дидактических материалов.

Перед тем как приступить к решению задач на построение методом подобия, желательно напомнить учащимся основные задачи на построение. С этой целью в начале урока можно выполнить следующее задание:

Начертите остроугольный треугольник ABC. Постройте: а) медиану AM, биссектрису AD и высоту AH треугольника ABC; б) прямую BN, параллельную медиане AM. (Нет необходимости требовать, чтобы учащиеся фактически выполнили все построения циркулем и линейкой, достаточно, если они укажут в каждом случае последовательность выполнения операций.)

Задачу 3 из п. 66 целесообразно разобрать самому учителю, а затем в классе можно решить задачу 589 с оформлением на доске и в тетрадях учащихся. Примерное оформление этой задачи:

Дано: отрезок PQ, $\angle hk$ (рис. 66, *а*).

Построить: $\triangle ABC$: $\angle A = \angle hk$, $BC = PQ$, $AB : AC = 2 : 1$.

Анализ (устно). Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 66, *б*). Тогда любой треугольник $A_1B_1C_1$, в котором $A_1B_1 \parallel AB$ ($A_1 \in AC$, $B_1 \in BC$), подобен треугольнику ABC по первому признаку подобия ($\angle A_1 = \angle A$, $\angle C$ — общий). Следовательно, $A_1B_1 : A_1C = 2 : 1$, $\angle A_1 = \angle hk$. Таким образом, достаточно построить какой-нибудь треугольник A_1B_1C, в котором $A_1B_1 : A_1C = 2 : 1$, $\angle A_1 = \angle hk$, а затем отложить на луче CB_1 отрезок $CB = PQ$ и через точку B провести прямую, параллельную прямой A_1B_1. Точка A пересечения этой прямой с прямой A_1C является вершиной искомого треугольника.

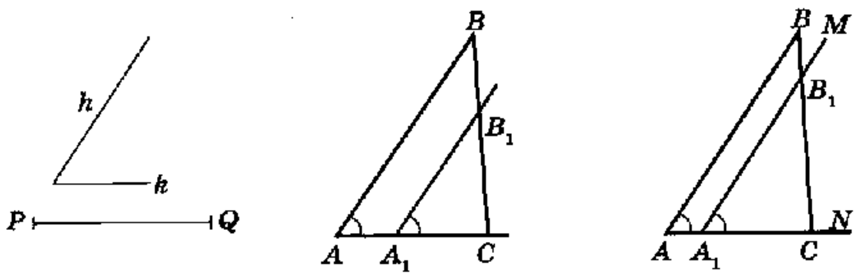
Построение. 1) Строим угол MA_1N, равный данному углу hk (рис. 66, *в*).

2) Отмечаем произвольную точку C на луче A_1N.

3) На луче A_1M откладываем отрезок A_1B_1, равный $2A_1C$.

4) На луче CB_1 откладываем отрезок CB, равный данному отрезку PQ.

5) Через точку B проводим прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает прямую A_1C в точке A. Треугольник ABC — искомый.



а) б) в)

Рис. 66

Доказательство. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ по двум углам ($\angle A = \angle A_1 = \angle hk$, так как $AB \parallel A_1B_1$, $\angle C$ — общий), поэтому $AB : AC = A_1B_1 : A_1C = 2 : 1$. $\triangle ABC$ — искомый, так как $\angle A = \angle hk$, $BC = PQ$ по построению, $AB : AC = 2 : 1$.

Исследование (устно). Указанный способ решения задачи показывает, что задача всегда имеет решение. Все треугольники, удовлетворяющие условиям задачи, подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle A = \angle hk$, $AB : AC = 2 : 1$), следовательно, их углы соответственно равны, а так как в любом из этих треугольников $BC = PQ$, то все они равны по второму признаку равенства треугольников. Таким образом, задача имеет единственное решение.

Далее в классе можно решить задачи 590, 622.

Дома: вопрос для повторения 12 (с. 159); задачи 586, 587, 588.

При наличии времени в конце второго урока рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и медиане, проведённой из вершины этого угла.

Вариант II

Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе прямого угла.

Вариант III (для наиболее подготовленных учащихся)

Постройте ромб по стороне и данному отношению 3 : 4 его диагоналей.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-21 из дидактических материалов.

На последнем из уроков, отведённых на изучение § 3, рекомендуется рассмотреть материал подпункта п. 66 «Измерительные работы на местности» и решить в классе задачи 581, 582.

В конце урока желательно провести небольшую беседу (10 мин) о подобии произвольных фигур (п. 67).

Дома: вопросы для повторения 13, 14 (с. 159); задачи 579, 580.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать** определения средней линии треугольника и среднего пропорционального (среднего геометрического) для двух отрезков; **формулировать и доказывать** теоремы о средней линии треугольника и точке пересечения медиан треугольника, теорему и её следствия о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, **уметь применять** их при решении задач типа 567, 568, 570, 572—577; **уметь объяснить,** в чём состоит метод подобия решения задач на построение, **применять** его при решении задач типа 586—590, **уметь разделить** отрезок в данном отношении с помощью циркуля и линейки; **уметь рассказать** о применении подобия в измерительных работах на местности, а также о том, как вводится понятие подобия произвольных фигур; в ходе изучения темы учащиеся должны проявить самостоятельность в получении новой информации из учебника.

Замечание. Практическое занятие (лабораторную работу) по проведению измерительных работ на местности можно провести в удобное время в конце учебного года.

§ 4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника *(3 ч)*

Назначение параграфа — познакомить учащихся с элементами тригонометрии, необходимыми для решения прямоугольных треугольников, а в дальнейшем для разработки тригонометрического аппарата геометрии. Здесь вводятся понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, вычисляются их значения для углов 30°, 45° и 60°. Столь раннее введение элементов тригонометрии связано в первую очередь с тем, что они необходимы учащимся на уроках физики уже в самом начале 9 класса.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: п. 68 — 1 урок, п. 69 — 1 урок, решение задач — 1 урок.

Весь теоретический материал п. 68 можно дать в виде небольшой лекции, усвоение содержания которой закрепляется в классе в процессе решения задач 591 (а, б), 592 (а, в, д), 593 (а).

Дома: вопросы для повторения 15, 16, 17 (с. 159); задачи 591 (в, г), 592 (б, г, е), 593 (б).

Решению прямоугольных треугольников рекомендуется посвятить часть первого и часть второго уроков. Полезно к каждой из задач 594—597 составить план решения, например:

Задача 594, *а*.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = b$, $\angle B = \beta$ (рис. 67).

Найти: BC, AB, $\angle A$.

Решение. 1. $\frac{b}{BC} = tg\beta$, $BC = \frac{b}{tg\beta}$.

2. $AB = \frac{b}{\sin\beta}$.

3. $\angle A = 90° - \beta$.

В классе можно решить задачи 594 (б), 597 (б), 598 (а).

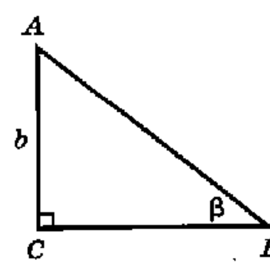


Рис. 67

Дома: задачи 595 (б), 596 (б), 598 (а).

Перед тем как приступить к вычислению значений тригонометрических функций для углов 30°, 45°, 60°, желательно напомнить учащимся свойство прямоугольного треугольника с острым углом в 30° и признак равнобедренного треугольника. С этой целью можно устно по заготовленным чертежам решить следующие задачи:

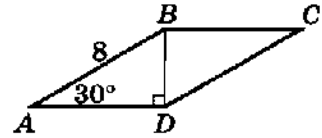


Рис. 68

1. На рисунке 68 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A = 30°$, $AB = 8$, $BD \perp AD$. Найдите площадь параллелограмма.
2. На рисунке 69 $ABCD$ — прямоугольная трапеция, BK — высота, $\angle A = \angle ABK$, $AK = KD = 2$ см. Найдите площадь трапеции.
3. На рисунке 70 $AC = BC$, $\angle ACB = 120°$. Найдите высоту BK треугольника ABC, если $AB = 15$ см.

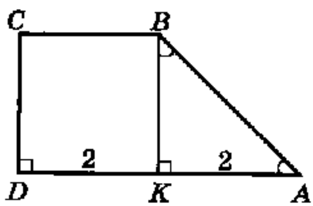


Рис. 69

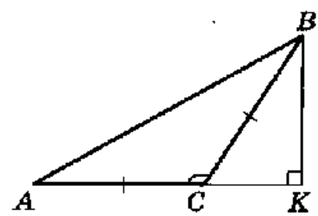


Рис. 70

После заполнения таблицы значений тригонометрических функций для углов 30°, 45°, 60° в классе рекомендуется решить задачи 593 (а) — для значения $\alpha = 30°$, 593 (б) — для значения $\alpha = 45°$ (устно), 601.

При наличии времени можно провести *самостоятельную работу* по вариантам С-22 из дидактических материалов.

Дома: вопрос для повторения 18 (с. 159); задачи 600, 602.

Последний урок отводится на решение задач к § 3 и 4 и подготовку к контрольной работе № 4. На этом уроке рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

В равнобедренной трапеции меньшее основание равно 4 см, боковая сторона равна 6 см, а один из углов трапеции равен 120°. Найдите площадь трапеции.

Вариант II

В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 3 см, большая боковая сторона равна 4 см, а один из углов трапеции равен 150°. Найдите площадь трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

В треугольнике ABC $AC = BC$, $\cos B = \frac{1}{3}$. Найдите отношение высот AM и CN треугольника ABC.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-23 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **знать и уметь чётко формулировать** определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника; **уметь доказывать** утверждение о том, что если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и также тангенсы этих углов равны; **знать и уметь обосновывать** основное тригонометрическое тождество; **знать**, чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°; **уметь решать** задачи типа 591—602.

Контрольная работа № 4 *(1 ч)*

Вариант I

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $AB = 20$ см, высота AD равна 12 см. Найдите AC и $\cos C$.
2. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна к стороне AD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 12$ см, $\angle A = 41°$.

Вариант II

1. Высота BD прямоугольного треугольника ABC равна 24 см и отсекает от гипотенузы AC отрезок DC, равный 18 см. Найдите AB и $\cos A$.
2. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна 3 см и составляет со стороной AD угол в 37°. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна к боковой стороне CD. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 10 см и 8 см.

2. Найдите отношение высот BN и AM равнобедренного треугольника ABC, в котором угол при основании BC равен α.

Для контрольной работы можно использовать также задачи из вариантов самостоятельной работы С-24 и контрольной работы К-4 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теоремы о признаках подобия треугольников.
2. Найдите отрезки, на которые биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC, если $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см.
3. Докажите, что медиана BM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный AC, концы которого лежат на сторонах AB и BC.

Вариант II

1. Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.
2. Сходственные стороны двух подобных треугольников соответственно равны 10 см и 24 см, а сумма их периметров равна 119 см. Найдите периметр каждого треугольника.
3. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $AM : MB = AN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна 75 см^2.

Вариант III

1. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
2. Точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC, $S_{BMN} = 12$ см^2. Найдите S_{ABC}.
3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, $AC = 12$ см, $BD = 15$ см. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

Вариант IV

1. Сформулируйте утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

2. Начертите произвольный отрезок и разделите его в отношении 2 : 3.
3. Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны 6 см и 8 см. Найдите длины отрезков, на которые перпендикуляр, проведённый из вершины D к диагонали AC, делит эту диагональ.

Вариант V

1. Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Диагонали ромба равны 12 см и $12\sqrt{3}$ см. Найдите углы ромба.
3. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна большему основанию AD этой трапеции и перпендикулярна к нему. Найдите площадь трапеции, если $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle C = 60°$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы VII

540. Можно предложить следующую краткую запись решения задачи (рис. 71):

1) $DMFN$ — ромб, следовательно, DF — биссектриса угла CDE, поэтому $\frac{EF}{DE} = \frac{CF}{CD}$ (см. задачу 535).

2) $P_{CDE} = 55$ см, $CE = EF + CF = 20$ см, следовательно, $CD + DE = 35$ см.

3) Пусть $CD = x$, тогда

$$DE = 35 - x, \quad \frac{12}{35 - x} = \frac{8}{x},$$

откуда $x = 14$.

4) $CD = x = 14$ см, $DE = 35 - x = 21$ см.

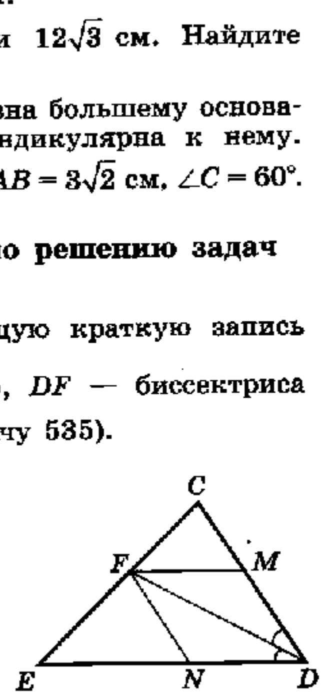


Рис. 71

543. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, S и S_1 — площади этих треугольников, k — коэффициент подобия, AH и A_1H_1 — высоты, проведённые к соответственным сторонам BC и B_1C_1. Тогда

$$\frac{S}{S_1} = k^2, \; S = \frac{1}{2}BC \cdot AH, \; S_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot A_1H_1, \; k = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Из этих равенств получаем

$$\frac{BC \cdot AH}{B_1C_1 \cdot A_1H_1} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2, \text{ откуда } \frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

569. Возможное оформление решения задачи:

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AD > BC$, M — середина AC, N — середина BD.

Доказать:

$MN \parallel AD$, $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

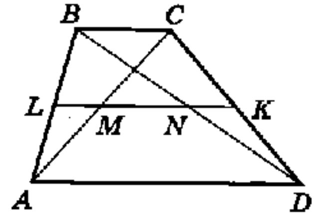


Рис. 72

Решение. Пусть K — середина стороны CD (рис. 72).

1) MK — средняя линия треугольника ACD, поэтому $MK \parallel AD$, $MK = \frac{1}{2}AD$.

2) NK — средняя линия треугольника BCD, поэтому $NK \parallel BC$, $NK = \frac{1}{2}BC$.

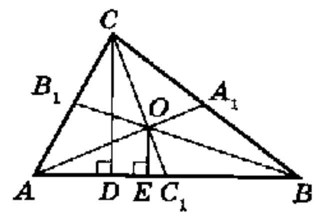


Рис. 73

3) Из соотношений $MK \parallel AD$, $NK \parallel BC$ следует, что точки M, N, K лежат на одной прямой, параллельной основаниям трапеции.

4) $MN = MK - NK = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

570. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Учесть, что AO и DM — медианы треугольника ABD.

571. Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC, CD и OE — высоты треугольников ABC и AOB (рис. 73). Так как $CC_1 : OC_1 = 3 : 1$, то $CD : OE = 3 : 1$, т. е. $CD = 3OE$. Поэтому $S_{ABC} = 3S_{AOB} = 3S$.

590. Дано: отрезки PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 74, *а*).

Построить: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AB = PQ$, $\frac{AC}{BC} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$.

Решение. Анализ. Задачу будем решать методом подобия (п. 66). Сначала можно построить какой-нибудь прямоугольный треугольник AB_1C_1 ($\angle C_1 = 90°$) так, чтобы $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$, а затем, используя условие $AB = PQ$, построить искомый треугольник ABC.

Построение. 1. Строим треугольник AB_1C_1 так, чтобы $\angle C_1 = 90°$, $C_1A = P_1Q_1$, $C_1B_1 = P_2Q_2$ (п. 39, задача 1).

2. На луче AB_1 отложим отрезок $AB = PQ$ (рис. 74, *б*).

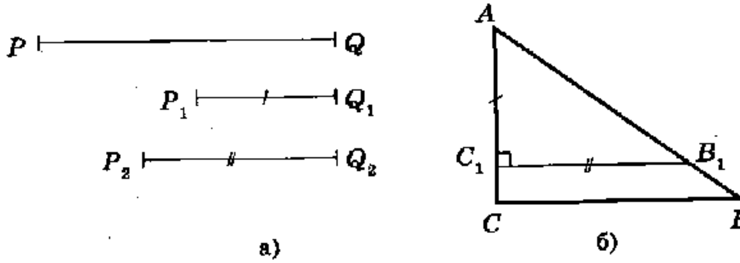


Рис. 74

3. Через точку B проведём прямую, параллельную отрезку B_1C_1. Она пересекает луч AC_1 в точке C. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle C = \angle C_1$, так как $BC \parallel B_1C_1$), поэтому

$$\angle C = 90°,\ \frac{AC}{BC} = \frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}.$$

Сторона AB равна данному отрезку PQ по построению. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Из построения следует, что задача при любых данных отрезках PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 имеет решение. Задача имеет единственное решение. В самом деле, если треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ удовлетворяют условиям задачи, то они подобны, а так как $A_1B_1 = PQ$, $A_2B_2 = PQ$, то $A_1B_1 = A_2B_2$ и, значит, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

605. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = a$, $BC = b$. Углы подобных по условию треугольников ABC и ACD обозначим так, как показано на рисунке 75.

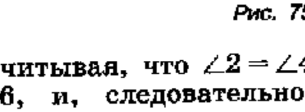


Рис. 75

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 2 = \angle 4$. Но отрезки AB и CD не параллельны, поэтому $\angle 3 \neq \angle 5$. Из подобия треугольников ABC и ACD следует, что каждый из углов 1, 2 и 3 треугольника ABC равен какому-то из углов 4, 5 и 6 треугольника ACD. Учитывая, что $\angle 2 = \angle 4$ и $\angle 3 \neq \angle 5$, получаем, что $\angle 3 = \angle 6$, и, следовательно, $\angle 1 = \angle 5$. Поэтому $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AC}$, откуда

$$AC^2 = AD \cdot BC = ab.$$

606. 1) Так как NK — биссектриса треугольника MNP (рис. 76), то $\frac{MK}{KP} = \frac{MN}{NP}$ (задача 535).

Пусть $MK = x$, тогда $KP = 7 - x$, следовательно, $\frac{x}{7-x} = \frac{5}{3}$, откуда

$$x = \frac{35}{8}, \text{ т. е. } MK = \frac{35}{8} \text{ см.}$$

2) Так как MO — биссектриса треугольника KMN, то

$$\frac{KO}{ON} = \frac{MK}{MN} = \frac{35}{8} : 5 = \frac{7}{8}.$$

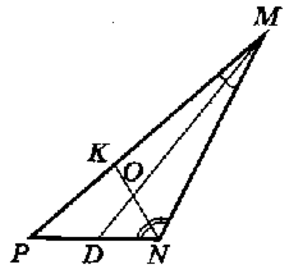


Рис. 76

609. Провести биссектрису AD_1 треугольника ABC и, сравнив условие задачи с утверждением, доказанным в задаче 535, доказать, что точки D и D_1 совпадают.

614. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $\angle A = 90°$, $AC \perp BD$, CK — высота трапеции (рис. 77).

1) Так как AO — высота прямоугольного треугольника ABD, то $\triangle AOD \sim \triangle BAD$ (п. 65, задача 2), поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

2) $\triangle ADC \sim \triangle BAD$, так как эти треугольники прямоугольные и $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно,

$$\frac{CD}{DA} = \frac{AD}{AB}, \text{ откуда } CD = \frac{AD^2}{AB} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} \text{ см.}$$

3) По теореме Пифагора для треугольника ABD

$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{13} \text{ см.}$$

4) По теореме Пифагора для треугольника BCK

$$BC = \sqrt{CK^2 + BK^2} = \sqrt{AD^2 + (AB - CD)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$$

615*. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AB = a$, $CD = b$, а MN — данный отрезок, проходящий через точку O пересечения диагоналей AC и BD (рис. 78).

1) $OM \parallel AB$, следовательно, $\triangle DOM \sim \triangle DBA$, откуда $\frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$. Аналогично $OM \parallel CD$, следовательно, $\triangle AOM \sim \triangle ACD$, откуда $\frac{OM}{CD} = \frac{AM}{AD}$.

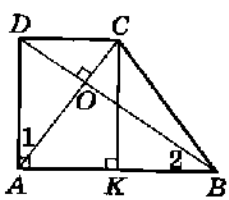


Рис. 77

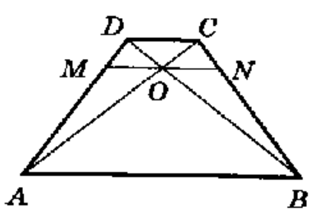


Рис. 78

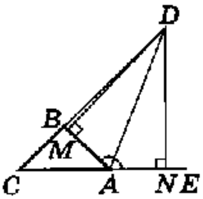


Рис. 79

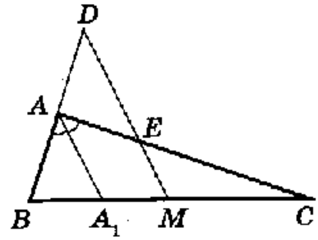


Рис. 80

2) Сложив полученные равенства почленно, приходим к равенству $\frac{OM}{a}+\frac{OM}{b}=1$, откуда $OM=\frac{ab}{a+b}$.

3) Аналогично находим $ON=\frac{ab}{a+b}$, и, следовательно,

$$MN = OM + ON = \frac{2ab}{a+b}.$$

619. Пусть точка B лежит между точками C и D, DM и DN — высоты треугольников ABD и ACD (рис. 79).

1) Так как D — точка биссектрисы угла BAE, то $DM = DN$, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB\cdot DM}{AC\cdot DN}=\frac{AB}{AC}$.

2) $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD\cdot DA}{DC\cdot DA}=\frac{BD}{DC}$. Таким образом,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}, \text{ или } \frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}.$$

620. Пусть M — середина стороны BC, AA_1 — биссектриса данного треугольника ABC (рис. 80).

1) Так как $\triangle ABA_1 \sim \triangle DBM$, то $\frac{AB}{BA_1}=\frac{BD}{BM}$.

2) Аналогично $\triangle CEM \sim \triangle CAA_1$, поэтому $\frac{CE}{CM}=\frac{CA}{CA_1}$.

3) Согласно задаче 535 $\frac{AB}{BA_1}=\frac{AC}{CA_1}$. Таким образом, $\frac{BD}{BM}=\frac{CE}{CM}$. Но $BM = CM$, поэтому $BD = CE$.

623. Воспользоваться задачей 556. На рисунке 81 выполнено построение: OA, OC и BC — данные отрезки, $AC \parallel BD$, AD — искомый отрезок.

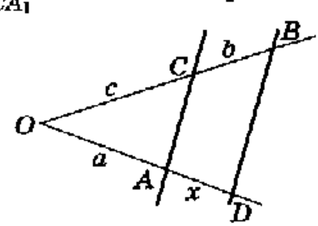


Рис. 81

624. Пусть K, M, N — данные точки (рис. 82). Тогда KM, MN, KN — средние линии искомого треугольника ABC, следовательно,

$$AB \parallel KM,\ BC \parallel KN,\ AC \parallel MN.$$

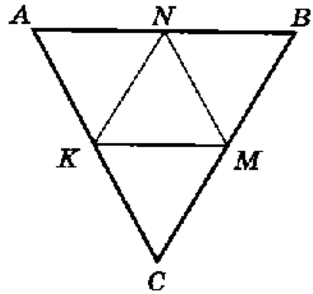


Рис. 82

625. Пусть AB — данная сторона искомого треугольника, O — точка пересечения данных медиан AA_1 и BB_1. Постройте сначала треугольник AOB, учитывая, что $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$.

ГЛАВА

VIII Окружность *(17 ч)*

Определение окружности и первые сведения об окружностях были даны в 7 классе. Назначение данной главы — расширить эти сведения и ввести новые важные понятия, связанные с окружностью. Теоретический материал главы обычно не вызывает затруднений у учащихся, что даёт возможность учителю в большей степени, чем раньше, опираться на самостоятельную работу учащихся с учебником.

В то же время рассматриваемая глава содержит большое число важных задач, которые широко используются в дальнейшем. Таковы, например, задачи **659**, **664**, **670**, **704**, **716**. Им следует уделить особое внимание.

Примерное тематическое планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Касательная к окружности	3	78—84	С-25
§ 2. Центральные и вписанные углы	4	85—94	С-26, С-27, С-28
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника	3	95—103	С-29
§ 4. Вписанная и описанная окружности	4	104—111	С-30, С-31
Решение задач	2	78—111	—
Контрольная работа № 5	1	—	К-5

§ 1 Касательная к окружности *(3 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть различные случаи взаимного расположения прямой и окружности, ввести понятие касательной к окружности, рассмотреть её свойство и признак, а также свойство отрезков касательных, проведённых из одной точки.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: взаимное расположение прямой и окружности — 1 урок; касательная к окружности — 1 урок; решение задач — 1 урок.

Перед тем как приступить к изучению п. 70 «Взаимное расположение прямой и окружности», желательно напомнить учащимся понятия расстояния между двумя точками и расстояния от точки до прямой (п. 38). С этой целью можно решить устно следующие задачи по заранее заготовленным чертежам:

1. Радиус окружности равен 5 см. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, содержащей хорду, равную 8 см.
2. Найдите расстояние от точки A до ближайшей к ней точки окружности с центром O радиуса r, если: а) $OA = 12$ см, $r = 8$ см; б) $OA = 6$ см, $r = 8$ см.
3. Докажите, что на рисунке 83, *а*, *б* $AB < AB_1$.

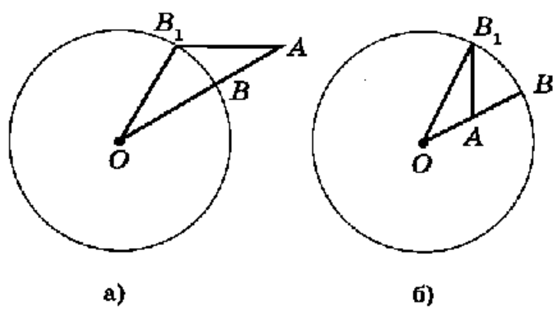


Рис. 83

Весь материал п. 70 рекомендуется изложить компактно, в виде небольшой лекции. При обосновании утверждения о том, что прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек, полезно сделать рисунок.

В классе рекомендуется решить задачи 631 (а, г, д) — устно, 632.

Дома: вопросы для повторения 1, 2 (с. 184); задачи 631 (б, в) — устно, 633.

Перед изучением свойств касательной к окружности и отрезков касательных, проведённых из одной точки, желательно проверить усвоение предыдущего материала в процессе устного решения задач, например:

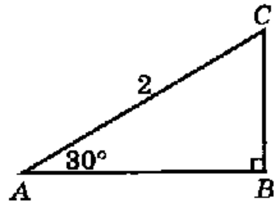


Рис. 84

4. По данным рисунка 84 определите взаимное расположение: а) прямой AB и окружности радиуса 1 с центром C; б) прямой BC и окружности радиуса 2 с центром A; в) прямой AC и окружности радиуса BC с центром B.

Весь теоретический материал п. 71 рекомендуется дать на одном уроке, причём теорему о свойстве касательной и утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки, можно предложить учащимся доказать самостоятельно в классе, а теорему о признаке касательной (вторую теорему п. 71) — дома.

Следующий урок отводится на решение задач к § 1.

В классе рекомендуется решить задачи 635, 639, 646 (д), 636, 645, 648 (а).

Дома: вопросы для повторения 3—7 (с. 184); задачи 634, 638, 640, 648 (б).

На последнем уроке, посвящённом изучению § 1, рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. KM и KN — отрезки касательных, проведённых из точки K к окружности с центром O. Найдите KM и KN, если $OK = 12$ см, $\angle MON = 120°$.
2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BD касается окружности с центром A и радиусом, равным OC.

Вариант II

1. Найдите отрезки касательных AB и AC, проведённых из точки A к окружности радиуса r, если $r = 9$ см, $\angle BAC = 120°$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Докажите, что прямая BD касается окружности с центром C и радиусом, равным AD.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. На рисунке 85 прямые AB, AC, MN — касательные к окружности. Найдите отрезки касательных AB и AC, если периметр треугольника AMN равен 24 см.

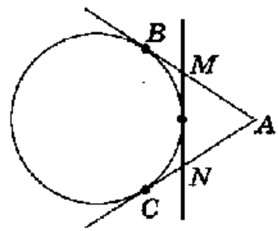


Рис. 85

2. Отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла C. Найдите радиус окружности с центром A, которая касается прямой CD, если $CD = 4$ см, $AB = 12$ см.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельной работы С-25 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить (и обосновать)**, какие возможны случаи взаимного расположения прямой и окружности; **формулировать** определение касательной к окружности, **формулировать и доказывать** теоремы о свойстве касательной и о признаке касательной, а также утверждение об отрезках касательных, проведённых из одной точки; **уметь решать задачи** типа 631, 633—636, 638—643, 648.

§ 2 Центральные и вписанные углы *(4 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия градусной меры дуги окружности, центрального и вписанного углов, доказать теоремы о вписанном угле и о произведении отрезков пересекающихся хорд и показать, как они используются при решении задач.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: градусная мера окружности — 1 урок; теоремы о вписанном угле и о произведении отрезков пересекающихся хорд — 2 урока; решение задач — 1 урок.

Материал, связанный с понятием градусной меры дуги, рекомендуется дать в виде короткой лекции (15 мин). Желательно, чтобы в тетрадях учащихся остался конспект этой лекции.

На рисунке 86:

$\angle AOC$, $\angle BOC$, $\angle AOB$ — центральные углы;

$\smile AB$ и $\smile ACB$ — полуокружности;

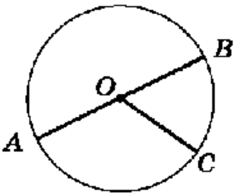


Рис. 86

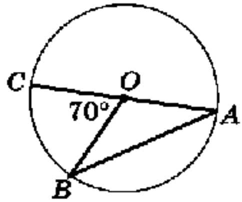


Рис. 87

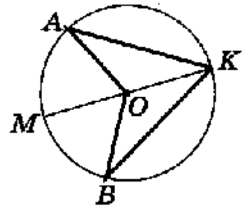


Рис. 88

$$\smile AC \text{ и } \smile BC \text{ меньше полуокружности;}$$
$$\smile BAC \text{ и } \smile ABC \text{ больше полуокружности;}$$
$$\smile AC = \angle AOC;\ \smile BC = \angle BOC;\ \smile AB = \smile ACB = \angle AOB;$$
$$\smile BAC = 360^\circ - \angle BOC;\ \smile ABC = 360^\circ - \angle AOC;$$
$$\smile AC + \smile ABC = \angle AOC + (360^\circ - \angle AOC) = 360^\circ.$$

В классе рекомендуется решить задачи 650 (а, в) — устно, 651 (а), 716.

Дома: вопросы для повторения 8, 9, 10 (с. 184); задачи 650 (б), 651 (б), 652.

Перед тем как приступить к изучению п. 73 «Теорема о вписанном угле», целесообразно провести подготовительную работу (устно, по заранее заготовленным чертежам).

1. На рисунке 87 изображена окружность с центром O, $\smile BC = 70°$. Найдите углы треугольника ABO.
2. На рисунке 88 изображена окружность с центром O, луч KM — биссектриса угла AKB. Докажите, что луч OM — биссектриса угла AOB.

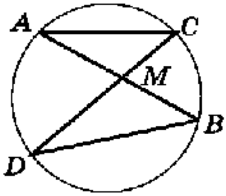
При доказательстве теоремы о вписанном угле учитель может разобрать только первый случай возможного расположения луча BO относительно угла ABC. Доказательство для двух других случаев после предварительного обсуждения идеи, на которой оно основано, а также обоснование двух следствий можно предложить учащимся провести самостоятельно.

Перед доказательством теоремы о произведении отрезков пересекающихся хорд желательно повторить первый признак подобия треугольников и подготовить учащихся к восприятию теоремы с помощью следующей задачи:

3. По данным рисунка 89, *а*, *б* докажите, что $\triangle AMC \sim \triangle DMB$.

В классе на этих уроках рекомендуется решить задачи 653 (устно), 654 (устно), 655, 656, 658, 659, 661, 662, 664, 666 (а, б), 668, 670, 671 (а).

Дома: вопросы для повторения 11, 12, 13, 14 (с. 184); задачи 657, 660, 663, 666 (в), 667, 669, 671 (б), 672.



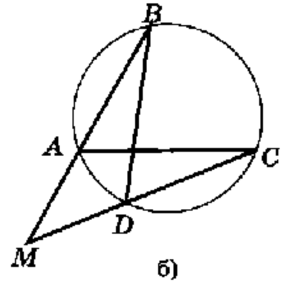


Рис. 89

Учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению геометрии, полезно самостоятельно решить задачи 673, 718, 719.

На последнем уроке рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу.*

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Точки A, B, C лежат на окружности с центром O (рис. 90), $\angle AOB = 80°$, $\smile AC : \smile BC = 2 : 3$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, причём хорда AB делится точкой K на отрезки, равные 10 см и 6 см. На какие отрезки точка K делит хорду CD, если CD больше AB на 3 см?

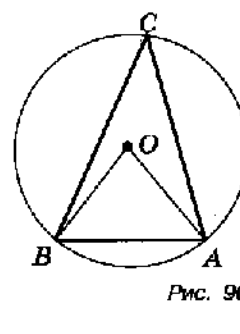


Рис. 90

Вариант II

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O (см. рис. 90), $\angle ABC = 80°$, $\smile BC : \smile AB = 3 : 2$. Найдите углы треугольника AOB.

2. Хорды MN и KL пересекаются в точке A, причём хорда MN делится точкой A на отрезки, равные 1 см и 15 см. На какие отрезки точка A делит хорду KL, если KL в два раза меньше MN?

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Окружность с центром O касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC соответственно в точках K, M, N, $\smile KM : \smile MN : \smile NK = 6 : 5 : 7$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Хорды AB, CD, EF окружности с центром O попарно пересекаются в точках K, M и N, как показано на рисунке 91, причём каждая хорда делится этими точками на три равные части. Найдите периметр треугольника KMN, если $AB = 12$ см.

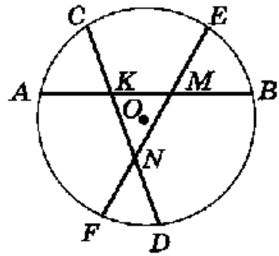


Рис. 91

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-26 и С-27 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать** определения центрального угла и вписанного угла, **уметь объяснить**, как определяется градусная мера дуги окружности, **формулировать и доказывать** теорему о вписанном угле, её следствия и теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд, **уметь применять** их при решении задач типа 651—657, 659, 666—669; в ходе изучения темы учащиеся должны **проявить умение** самостоятельно проводить доказательство (не используя учебник) во втором и третьем случаях в теореме о вписанном угле, а также доказательство следствий из этой теоремы.

§ 3 Четыре замечательные точки треугольника *(3 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку и на их основе доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Утверждение о пересечении медиан треугольника в одной точке было доказано в предыдущей главе. Таким образом, результаты данного параграфа дают возможность ввести понятие четырёх замечательных точек треугольника.

Материал параграфа рекомендуется распределить по урокам следующим образом: теорема о биссектрисе угла — 1 урок; понятие серединного перпендикуляра к отрезку и теорема о серединном перпендикуляре — 1 урок; теорема о точке пересечения высот треугольника — 1 урок.

Перед тем как сформулировать теорему о биссектрисе угла, желательно устно провести подготовительную работу по заготовленным чертежам:

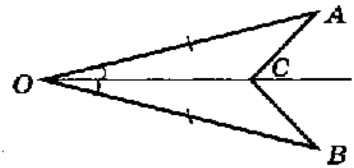


Рис. 92

1. На рисунке 92 луч OC — биссектриса угла AOB, $OA = OB$. Докажите, что $S_{AOC} = S_{BOC}$.
2. Прямая m пересекает отрезок AB в его середине. Докажите, что концы отрезка AB равноудалены от прямой m.

Доказательство теоремы о биссектрисе угла и два следствия из неё рекомендуется изложить самому учителю в виде небольшой лекции, обратив внимание на то, геометрическим местом каких точек плоскости является биссектриса угла.

В классе можно решить задачи 674, 675, 676 (а).

Дома: вопросы для повторения 15, 16 (с. 185); задачи 676 (б), 678 (а).

Введение понятия серединного перпендикуляра к отрезку можно предварить устной задачей по заранее заготовленному чертежу.

3. Прямая KM перпендикулярна к стороне AB треугольника ABC и делит её пополам. Точка M лежит на стороне AC. Докажите, что $AC > BC$.

Доказательство теоремы о серединном перпендикуляре к отрезку и следствия из неё учителю также желательно изложить самому. При этом следует акцентировать внимание учащихся на том, геометрическим местом каких точек плоскости является серединный перпендикуляр к отрезку. Усвоение материала можно закрепить в процессе решения в классе задач 679 (б), 680, 682.

Дома: вопросы для повторения 17—19 (с. 185); задачи 679 (а), 681, 686.

Теорему о точке пересечения высот треугольника учителю рекомендуется прокомментировать по заранее заготовленному чертежу, а детальное доказательство предложить учащимся провести дома самостоятельно или с помощью учебника.

Для лучшего усвоения теоремы о пересечении высот треугольника можно предложить учащимся решить такую задачу:

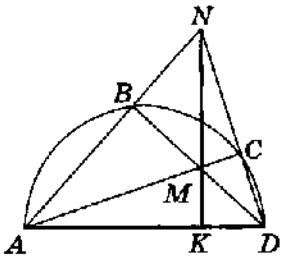


Рис. 93

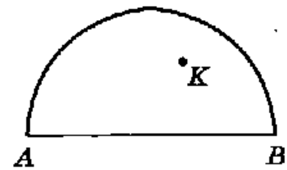


Рис. 94

4. По данным рисунка 93, где дуга ABD — полуокружность, доказать, что прямая MN перпендикулярна к диаметру AD.

Учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению геометрии, можно предложить для домашней работы следующую задачу:

5. На рисунке 94 изображена полуокружность с концами A и B и отмечена точка K. С помощью одной линейки постройте прямую, проходящую через точку K и перпендикулярную к прямой AB.

Кроме того, в классе рекомендуется решить задачи (по всему материалу § 3) 677, 684, 687.

При наличии времени можно провести самостоятельную работу по вариантам С-29 из дидактических материалов.

Дома: вопрос для повторения 20 (с. 185); задачи 688, 720.

Желательно, чтобы в тетрадях у учащихся были сделаны рисунки, характеризующие четыре замечательные точки треугольника:

M — точка пересечения медиан треугольника ABC; $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$ (рис. 95).

O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 96).

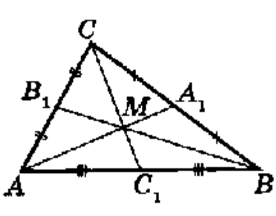


Рис. 95

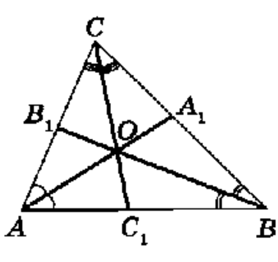


Рис. 96

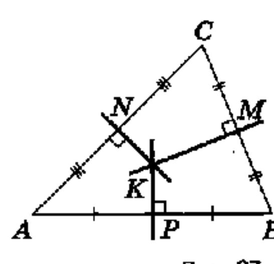


Рис. 97

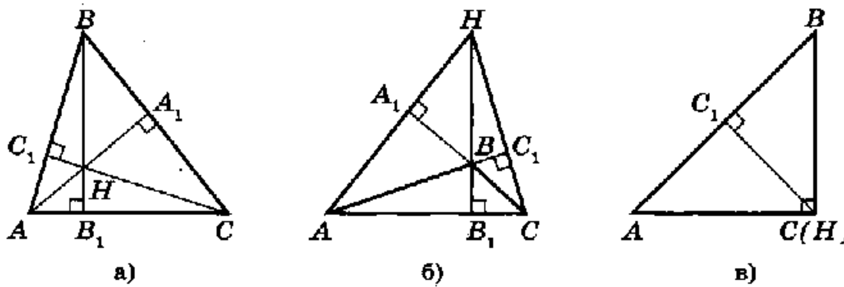


Рис. 98

K — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC; $AK = BK = CK$ (рис. 97).

H — точка пересечения высот (или их продолжений) треугольника ABC (рис. 98, *а—в*).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** теоремы о биссектрисе угла и о серединном перпендикуляре к отрезку и их следствия, а также теорему о пересечении высот треугольника; **знать**, какие четыре точки называются замечательными точками треугольника; **уметь решать задачи** типа 674—679, 682—686.

§ 4 Вписанная и описанная окружности *(4 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника окружностей, доказать теоремы об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника, вывести формулу, выражающую площадь треугольника через его полупериметр и радиус вписанной окружности, ознакомить учащихся со свойствами вписанного и описанного четырёхугольников.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: вписанная окружность — 2 урока; описанная окружность — 2 урока.

Теоретический материал п. 77 до замечания 3 рекомендуется изложить на первом уроке в виде небольшой лекции после устной подготовительной работы по заготовленным чертежам.

1. На рисунке 99 окружность с центром O касается сторон угла MKN в точках M и N. Найдите угол MKN и

расстояние MN, если $OM = \sqrt{3}$ см, $KM = 3$ см.

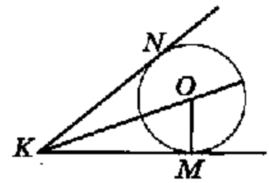


Рис. 99

2. На рисунке 100 три касательные к окружности с центром O пересекаются попарно в точках A, B и C. Найдите углы треугольника ABC, если в треугольнике AOC $\angle A = 20°$ и $\angle O = 120°$.

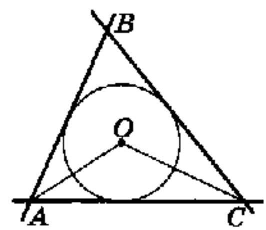


Рис. 100

3. Стороны угла A касаются окружности радиуса r с центром O. а) Найдите OA, если $r = 5$ см, $\angle A = 60°$. б) Найдите r, если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90°$.

Для усвоения материала, изложенного в лекции, в классе рекомендуется решить задачи 701 (для остроугольного треугольника), 689, 691.

Дома: вопросы для повторения 21, 22 (с. 185); задачи 701 (для прямоугольного и тупоугольного треугольников), 637, 690, 693 (а).

Перед рассмотрением свойства описанного четырёхугольника желательно также провести устную подготовительную работу.

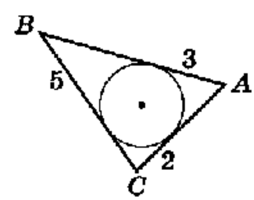


Рис. 101

4. По данным рисунка 101 найдите периметр треугольника ABC.

5. На рисунке 102 $ABCD$ — равнобедренная трапеция. По данным рисунка найдите её основания AB и CD.

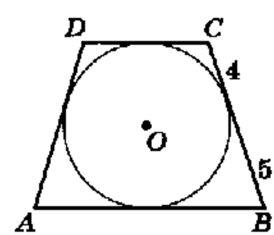


Рис. 102

Свойство описанного четырёхугольника и решение задачи 697, утверждение которой используется в дальнейшем, учитель должен подробно объяснить учащимся. Затем в классе можно решить задачи 695 (устно), 698.

Дома: вопрос для повторения 23 (с. 185); задачи 641, 696, повторить решение задачи 697. Учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению геометрии, полезно разобрать дома решение задачи 724. Отметим, что в учебнике приведено краткое решение задачи 724, в котором не пояснено, почему окружность с центром O касается именно сторон AD, AB и BC четырёхугольника $ABCD$. Ясно, что эта окружность касается лучей AB и BA, поэтому точка касания с прямой AB лежит на отрезке AB. Далее, эта окружность касается лучей BC и AD. Учитывая равенство $AB + CD = BC + AD$, получаем, что точки касания с лучами BC и AD лежат на отрезках BC и AD. Это утверждение легко доказать методом от противного.

При наличии времени в конце второго урока можно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 2 см. Найдите периметр треугольника и его площадь.

Вариант II

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 см, а сумма катетов равна 17 см. Найдите периметр треугольника и его площадь.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Докажите, что радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию с основаниями a и b, равен $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-30 из дидактических материалов.

Теоретический материал п. 78 до замечания 2 рекомендуется изложить в форме лекции, а затем в классе решить задачи 711 (для тупоугольного треугольника), 702 (а), 704 (а, б), 706.

Дома: вопросы для повторения 24, 25 (с. 185); задачи 711 (для прямоугольного и равностороннего треугольников), 702 (б), 705 (б).

Перед рассмотрением замечания 2 (свойство вписанного четырёхугольника) желательно провести устную работу по заготовленным заранее чертежам.

6. Задача 705 (а).
7. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, причём $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 2 : 3 : 4$. Найдите углы треугольника ABC.
8. По данным рисунка 103 найдите все углы вписанного четырёхугольника $ABCD$.

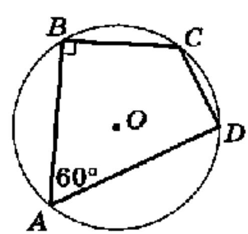


Рис. 103

Доказательство утверждения о свойстве вписанного четырёхугольника можно предложить учащимся разобрать самостоятельно по учебнику (хорошо успевающим — без помощи учебника), а затем решить в классе задачи 708 (а), 710.

Дома: вопрос для повторения 26 (с. 185); задачи 708 (б), 709. Учащимся, интересующимся геометрией, можно предложить изучить решение задачи 729.

На последнем уроке целесообразно провести *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, делит высоту, проведённую к основанию, на отрезки, равные 5 см и 13 см. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант II

Меньший из отрезков, на которые центр описанной около равнобедренного треугольника окружности делит его высоту, проведённую к основанию, равен 8 см, а основание треугольника равно 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Найдите площадь равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона $4\sqrt{5}$ см, а радиус описанной окружности 5 см.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-31 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какая окружность называется вписанной в многоугольник и какая — описанной около многоугольника, какой многоугольник называется описанным около окружности и какой — вписанным в окружность; **уметь формулировать и доказывать теоремы** об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника; **выводить формулу**, выражающую площадь треугольника через его полупериметр и радиус вписанной окружности; **знать** свойства описанного и вписанного четырёхугольников, а также утверждения, обратные утверждениям об этих свойствах; **уметь применять** полученные из данного параграфа знания при решении задач типа 689—711.

Решение задач (2 ч)

Основная цель этих уроков — продолжить отработку навыков решения задач по теме «Окружность» и подготовить учащихся к контрольной работе. Задачи к этим урокам подбираются из ранее не решённых задач к § 1—4, а также из дополнительных задач к главе VIII, например задачи 642, 643, 644, 665, 683, 685, 694, 703, 707, 721, 728, 730.

Контрольная работа № 5 *(1 ч)*

Вариант I

1. Через точку A окружности проведены диаметр AC и две хорды AB и AD, равные радиусу этой окружности. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, BC, CD, AD.
2. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а боковая сторона равна 15 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

Вариант II

1. Отрезок BD — диаметр окружности с центром O. Хорда AC делит пополам радиус OB и перпендикулярна к нему. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, BC, CD, AD.
2. Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 9 см, а основание равно 24 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. На рисунке 104 MA и MB — секущие, AC и BD — хорды окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB = \angle AKB + \angle AMB$.
2. Площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD, описанной около окружности с центром O и радиусом 3 см, равна 60 см^2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OCD.

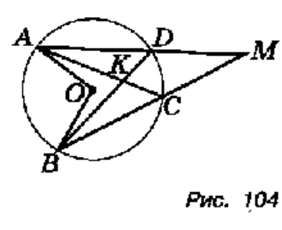


Рис. 104

Можно использовать также варианты контрольной работы К-5 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность? Сформулируйте теоремы о свойстве и признаке касательной.
2. Отрезок BD — высота равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. На какие части окружность с центром B и радиусом BD делит боковую сторону треугольника, если $AB = 13$ см, $BD = 5$ см?
3. На рисунке 105 изображён прямоугольный треугольник ABC, стороны которого касаются окружности радиуса 1 см. На какие отрезки точка касания делит гипотенузу треугольника, равную 5 см?

Вариант II

1. Какой угол называется вписанным? Сформулируйте теорему о вписанном угле.
2. Вершины треугольника со сторонами 2 см, 5 см и 6 см лежат на окружности. Докажите, что ни одна из сторон треугольника не является диаметром этой окружности.
3. На рисунке 106 изображена окружность с центром O, прямая AB — касательная, а прямая AC — секущая этой окружности. Найдите углы треугольника ABC, если $\smile BD = 62°$.

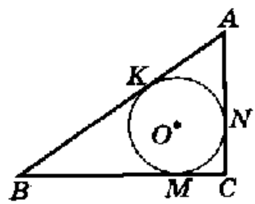


Рис. 105

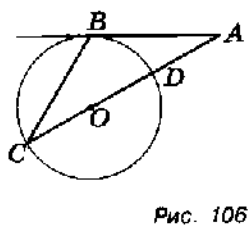


Рис. 106

Вариант III

1. Сформулируйте теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.
2. Хорды KL и MN окружности пересекаются в точке A. Найдите AK и AL, если $AM = 2$ дм, $AN = 6$ дм, $KL = 7$ дм.
3. На рисунке 107 изображена окружность с центром O, отрезок AC — диаметр, а прямая BC — касательная к этой окружности. На какие части отрезок AB делится точкой D, если $AC = 20$ см, $BC = 15$ см?

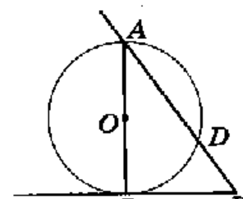


Рис. 107

Вариант IV

1. Сформулируйте теорему об окружности, вписанной в треугольник.

2. Впишите окружность в данный прямоугольный треугольник.

3. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, боковая сторона равна 17 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Вариант V

1. Сформулируйте утверждение о свойстве описанного четырёхугольника. Верно ли обратное утверждение?

2. Найдите площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, если боковые стороны этой трапеции равны 10 см и 16 см.

3. Площадь четырёхугольника $ABCD$, описанного около окружности радиуса 5 дм, равна 90 дм^2. Найдите стороны CD и AD этого четырёхугольника, если $AB = 9$ дм, $BC = 10$ дм.

Вариант VI

1. Сформулируйте теорему об окружности, описанной около треугольника.

2. Постройте окружность, описанную около данного тупоугольного треугольника.

3. Найдите площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса $4\sqrt{3}$ см.

Вариант VII

1. Сформулируйте утверждение о свойстве вписанного четырёхугольника. Верно ли обратное утверждение?

2. Площадь прямоугольника, вписанного в окружность, равна 48 см^2. Найдите радиус окружности, если одна из сторон прямоугольника на 2 см больше другой.

3. На рисунке 108 AM и CM — биссектрисы углов A и C треугольника ABC, AN и CN — биссектрисы внешних углов при вершинах A и C этого треугольника. Докажите, что около четырёхугольника $AMCN$ можно описать окружность.

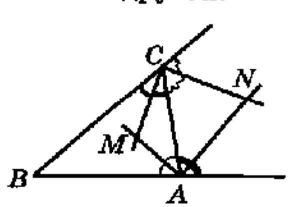


Рис. 108

Комментарии и рекомендации по решению задач главы VIII

632. Пусть O — центр данной окружности радиуса r, p — произвольная прямая, проходящая через точку A. Если $O \in p$, то прямая p пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой. Если $O \notin p$, то проведём перпендикуляр OB к прямой p (рис. 109). Так как OB — расстояние от точки O до прямой p, то $OB \leqslant OA$ (см. п. 38). Но $OA < r$ по условию, следовательно, $OB < r$, и поэтому прямая p — секущая.

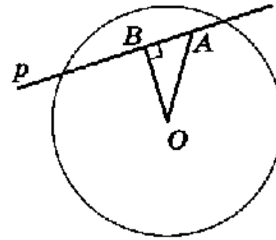


Рис. 109

637. Проведём радиус OC данной окружности (рис. 110).

1. Так как угол COD — внешний угол равнобедренного треугольника AOC ($OA = OC$) и $\angle A = 30°$, то $\angle COD = 60°$.
2. По свойству касательной $OC \perp CD$. В прямоугольном треугольнике OCD $\angle O = 60°$, поэтому $\angle D = 30°$.
3. Треугольник ACD равнобедренный, так как $\angle A = \angle D = 30°$.

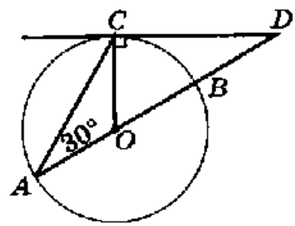


Рис. 110

645. Указание. Провести радиус OK, где K — точка касания, и воспользоваться задачей 385.

659. Указание. Пусть AB и CD — параллельные хорды (рис. 111). Провести хорду BC и воспользоваться теоремой о вписанном угле.

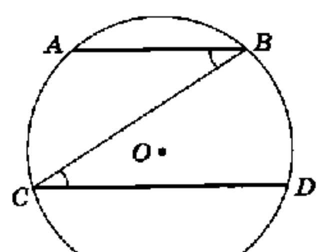


Рис. 111

660. Пусть M — данная точка, $\smile AB > \smile CD$ (рис. 112). Проведём хорду BC.

1. Так как $\smile AB = 100°$, то $\angle ACB = 50°$.
2. В треугольнике MBC $\angle M = 32°$, а внешний угол ACB при вершине C равен $50°$, поэтому $\angle B = 50° - 32° = 18°$.
3. $\smile CD = 2 \cdot 18° = 36°$.

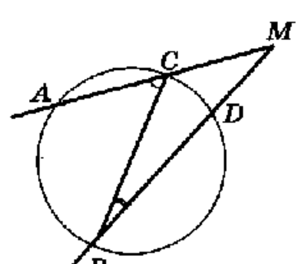


Рис. 112

662. Указание. Провести хорду AC и сначала найти $\angle A$ и $\angle C$ в треугольнике ACE.

668. Пусть AB — диаметр окружности, CD — перпендикуляр, проведённый из точки C окружности к прямой AB (рис. 113). Проведём хорды AC и BC.

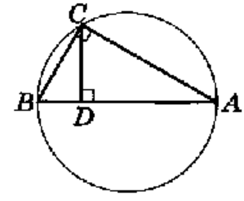


Рис. 113

1. Угол ACB вписанный и опирается на полуокружность, следовательно, $\angle ACB = 90°$.
2. Так как CD — высота прямоугольного треугольника ABC, то $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$ (п. 65, свойство 1^0).

670. 1. $\angle ABP = \angle AQB$, так как $\angle ABP = \frac{1}{2}\smile BP$ (задача 664) и $\angle AQB = \frac{1}{2}\smile BP$ (рис. 114).

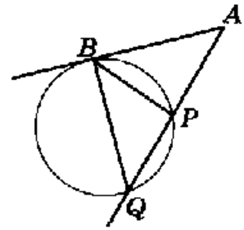


Рис. 114

2. $\triangle ABP \sim \triangle AQB$ по двум углам (угол A общий и $\angle ABP = \angle AQB$). Следовательно, $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$, откуда $AB^2 = AP \cdot AQ$.

675. Пусть O_1 и O_2 — центры двух данных окружностей, прямая m — их общая касательная, A — точка касания (рис. 115).

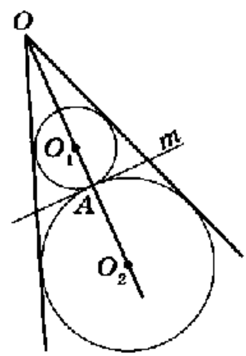


Рис. 115

1. Точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла O (следствие из теоремы 1 п. 74), и, значит, точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.
2. $O_1A \perp m$ и $O_2A \perp m$ (свойство касательной), следовательно, точки A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Таким образом, точки A, O, O_1, O_2 лежат на одной прямой, и, значит, точки O_1 и O_2 лежат на прямой OA.

680. Указание. а) Воспользоваться теоремой о серединном перпендикуляре к отрезку.

б) Сначала доказать, что треугольники ACD и ABD равнобедренные.

687. Искомая точка является точкой пересечения серединного перпендикуляра m к отрезку AB и прямой a. По условию точки A и B лежат по одну сторону от прямой a, поэтому прямые m и a либо пересекаются, либо параллельны, и тогда $AB \perp a$. В первом случае задача имеет единственное решение, а во втором случае она не имеет решений.

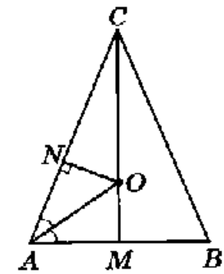


Рис. 116

689. Пусть $\triangle ABC$ — данный равнобедренный треугольник (рис. 116). $AC = BC = 13$ см, $AB = 10$ см. Центр O вписанной окружности искомого радиуса r лежит на биссектрисе CM треугольника ABC, а так как $CM \perp AB$ (свойство равнобедренного треугольника), то вписанная окружность касается отрезка AB в точке M. Поэтому $OM = r$.

Далее полезно обсудить с учащимися различные способы решения этой задачи.

Способ 1. 1. $AM = \frac{1}{2}AB = 5$ см.

2. M и N — точки касания, следовательно, $AN = AM = 5$ см, откуда $CN = AC - AN = 8$ см.

3. В треугольнике ACM $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 12$ см.

4. В треугольнике CON $CO^2 = CN^2 + ON^2$, т. е. $(12 - r)^2 = 8^2 + r^2$, откуда $r = 3\frac{1}{3}$ см.

Способ 2. 1. В треугольнике ACM $AM = \frac{1}{2}AB = 5$ см.

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 12 \text{ см}.$$

2. Отрезок AO — биссектриса треугольника AMC (так как O — центр вписанной окружности), поэтому $\frac{OM}{OC} = \frac{AM}{AC}$ (задача 535), или $\frac{r}{12 - r} = \frac{5}{13}$, откуда $r = 3\frac{1}{3}$ см.

Замечание. После решения задачи 697 можно вернуться к задаче 689 и показать ещё один способ её решения.

Способ 3. 1. В треугольнике ACM $AM = \frac{1}{2}AB = 5$ см, $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 12$ см, следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CM = 60 \text{ см}^2.$$

2. $S_{ABC} = pr$, где $p = \frac{2AC + AB}{2} = 18$ см, откуда $r = \frac{S}{p} = 3\frac{1}{3}$ см.

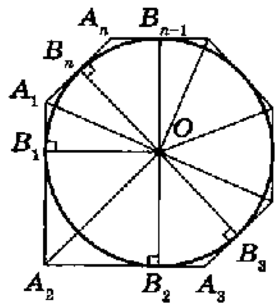


Рис. 117

697. Пусть окружность радиуса r с центром O вписана в многоугольник $A_1A_2...A_n$ и пусть B_1, B_2, ..., B_n — точки касания (рис. 117).

Тогда $OB_1 = OB_2 = ... = OB_n = r$ и $OB_1 \perp A_1A_2$, $OB_2 \perp A_2A_3$, ..., $OB_n \perp A_nA_1$ (по свойству касательной). Очевидно,

$$S_{A_1A_2...A_n} = S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3} + ... + S_{A_nOA_1} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot r + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot r +$$

$$+ ... + \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot r = \frac{1}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1)r = \frac{1}{2}Pr = pr,$$

где P — периметр, p — полупериметр описанного многоугольника.

707. Дано: $\triangle ABC$, $AC = BC = 8$ см, $\angle ACB = 120°$.

Найти: $2R$, где R — радиус описанной окружности.

Решение. Центр O описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров DD_1 и HH_1 к сторонам AC и AB треугольника ABC (рис. 118). Так как треугольник ABC равнобедренный, то прямая HH_1 проходит через вершину C и луч CH — биссектриса угла ACB.

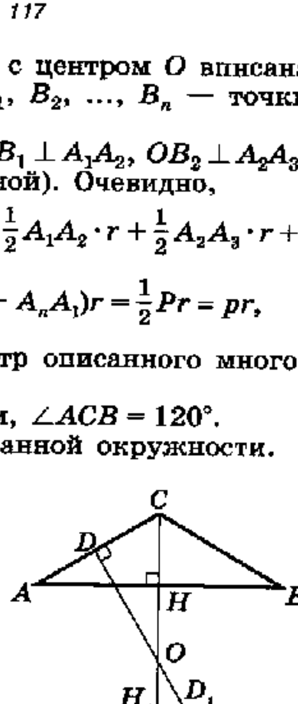


Рис. 118

В прямоугольном треугольнике CDO $\angle OCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 60°$, поэтому $\angle COD = 30°$, $CO = 2CD = AC = 8$ см. Итак, $R = CO = 8$ см, и, значит, диаметр описанной окружности равен 16 см.

714*. Пусть K — точка пересечения общей касательной, проходящей через точку M, и прямой AB (рис. 119). Тогда $KA = KM$ и

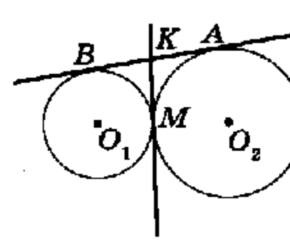


Рис. 119

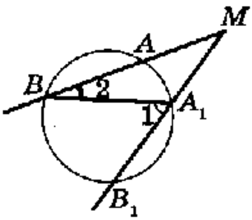


Рис. 120

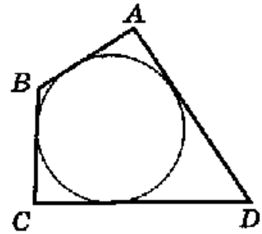


Рис. 121

$KB = KM$ (по свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки). Таким образом, точки A, B, M одинаково удалены от точки K и, следовательно, лежат на одной окружности с центром K, для которой отрезок AB является диаметром.

719. Пусть MB и MB_1 — секущие, проходящие через точку M, лежащую вне окружности (рис. 120). Проведём хорду A_1B.

1. $\angle 1$ — внешний угол треугольника A_1BM, поэтому $\angle 1 = \angle 2 + \angle M$, откуда $\angle M = \angle 1 - \angle 2$.
2. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile BB_1$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile AA_1$,

   следовательно,
$$\angle M = \frac{1}{2}\smile BB_1 - \frac{1}{2}\smile AA_1 = \frac{1}{2}(\smile BB_1 - \smile AA_1).$$

722. Пусть $ABCD$ — данный описанный четырёхугольник (рис. 121), p — его полупериметр. Сначала выразим стороны четырёхугольника $ABCD$ через p.

1. Пусть $AB = x$, $BC = y$. Тогда $CD = \frac{3}{2}x$, $AD = 2y$,
$$x + y + \frac{3}{2}x + 2y = 2p,$$
   или
$$\frac{5}{2}x + 3y = 2p. \qquad (1)$$
2. Согласно свойству описанного четырёхугольника (п. 77) $AB + CD = AD + BC$, т. е.
$$\frac{5}{2}x = 3y. \qquad (2)$$
3. Решая систему уравнений (1) и (2), находим $x = \frac{2}{5}p$, $y = \frac{1}{3}p$. Таким образом,
$$AB = \frac{2}{5}p,\ BC = \frac{1}{3}p,\ CD = \frac{3}{5}p,\ AD = \frac{2}{3}p.$$

4. Так как $S = pr$ (задача 697), то $p = \frac{S}{r}$. Итак,

$$AB = \frac{2}{5} \cdot \frac{S}{r},\ BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{r},\ CD = \frac{3}{5} \cdot \frac{S}{r},\ AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{r}.$$

725. Пусть $ABCD$ — данная прямоугольная трапеция с основаниями $AD = a$ и $BC = b$, $\angle A = 90°$, r — радиус вписанной окружности (рис. 122).

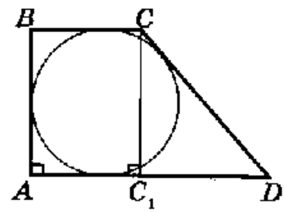


Рис. 122

1. Согласно свойству описанного четырёхугольника (п. 77)

$$AB + CD = AD + BC = a + b.$$

Но $AB = 2r$, поэтому $CD = a + b - 2r$.

2. Если CC_1 — высота трапеции, то по теореме Пифагора

$$CD^2 = CC_1^2 + C_1D^2,$$

или

$$(a + b - 2r)^2 = (2r)^2 + (a - b)^2.$$

Отсюда получаем $r = \frac{ab}{a+b}$.

726. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной окружности, AM — медиана треугольника. Если точка O лежит на медиане AM и не совпадает с точкой M, то прямая MA — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому отрезок AM также высота треугольника ABC, и, значит, треугольник ABC равнобедренный (задача 110). Если точки O и M совпадают, то BC — диаметр описанной окружности, поэтому $\angle A = 90°$ и треугольник ABC — прямоугольный.

731. Учесть, что биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, взаимно перпендикулярны, и воспользоваться задачей 729.

735. Указание. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями $AD = a$, $BC = b$, $a > b$ (рис. 123), r — радиус вписанной окружности.

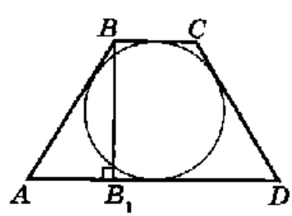


Рис. 123

1. Согласно задаче 710 трапеция равнобедренная, т. е. $AB = CD$.
2. Согласно свойству описанного четырёхугольника (п. 74) $AB + CD = AD + BC = a + b$, поэтому $AB = \frac{a+b}{2}$.

3. Если BB_1 — высота трапеции, то $BB_1 = 2r$, $AB_1 = \frac{a-b}{2}$.

По теореме Пифагора для треугольника ABB_1 имеем

$$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2, \text{ или } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 4r^2,$$

откуда получаем $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

736. Центр искомой окружности есть точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a.

737. Учесть, что если данная точка A расположена в полосе между данными параллельными прямыми, то задача имеет два решения, а если точка A лежит вне этой полосы, то задача не имеет решения. В первом случае воспользоваться указанием, данным в учебнике.

Повторение. Решение задач (4 ч)

На уроках итогового повторения можно использовать вопросы, содержащиеся в конце каждой главы учебника, а также карточки для устного опроса учащихся по каждой главе, приведённые в данном методическом пособии. На этих уроках обобщаются и систематизируются знания по курсу геометрии. Полезно сконцентрировать внимание учащихся на следующих основных вопросах:

Четырёхугольники. Площадь многоугольника	2 ч
Подобные треугольники	1 ч
Окружность	1 ч

Основное внимание при повторении тем «Четырёхугольники» и «Площадь многоугольника» нужно уделить задачам на вычисление площадей параллелограмма, треугольника, трапеции и задачам на применение теоремы Пифагора. При повторении темы «Подобные треугольники» особое внимание следует уделить применению признаков подобия треугольников при решении задач. При повторении темы «Окружность» желательно порешать задачи, связанные с вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностями, в частности, рассмотреть вопрос о положении центров вписанной и описанной окружностей для различных видов треугольников (равнобедренный, прямоугольный, тупоугольный). При этом могут быть использованы следующие задачи: 425, 426, 428, 431, 434, 438, 469, 472, 476, 481, 482, 489, 490, 496, 499, 519, 522, 537, 545, 556, 559, 563, 570, 576, 610, 618, 657, 662, 678, 681, 691, 693, 697, 703, 705, 725, 733, 735.

Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности

813. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник (рис. 124). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC.

1. Возьмём треугольник ABC и будем приставлять друг к другу равные ему треугольники BCE, CEF, EFG, ... справа, как показано на рисунке 125, *а*, а затем также слева от точки B. Ясно, что такими равными треугольниками можно покрыть часть плоскости, заключённую между параллельными прямыми AC и BE (такая часть плоскости называется полосой).

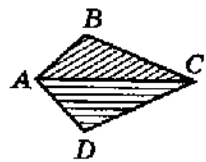


Рис. 124

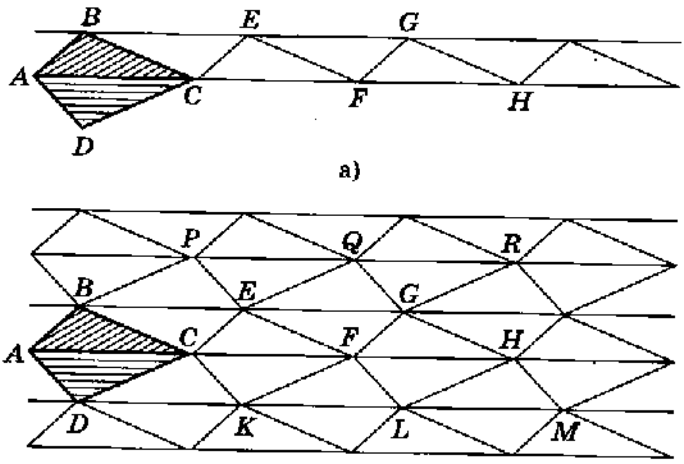


Рис. 125

2. Далее будем приставлять друг к другу треугольники DCK, CKF, KFL, ..., равные треугольнику ACD, как показано на рисунке 125, *б*. Такие треугольники покроют полосу между параллельными прямыми AC и DK. Точно так же полосу сверху от прямой BE (между параллельными прямыми BE и PQ) заполним треугольниками BPE, PEQ, EQG, ..., равными треугольнику ACD.
3. Следующие две полосы (снизу от прямой DK и сверху от прямой PQ) заполним треугольниками, равными треугольнику ABC (см. рис. 125, *б*), и т. д.

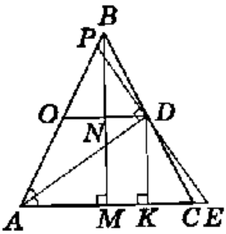


Рис. 126

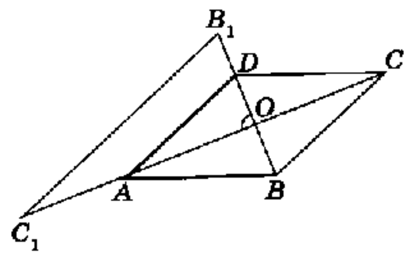


Рис. 127

4. Наглядно видно, что в результате описанного процесса любая часть плоскости будет покрыта четырёхугольниками, равными четырёхугольнику $ABCD$.

Замечание. Четырёхугольник $ABCD$ может быть и невыпуклым. Описанная процедура пригодна и в этом случае, нужно только взять ту диагональ четырёхугольника, которая разделяет его на два треугольника.

816. Пусть P — точка пересечения прямых DE и AB. Через точку D проведём прямую DO, параллельную прямой AC, $O \in AB$ (рис. 126).

1. В треугольнике AEP отрезок AD — биссектриса и высота, поэтому $DE = DP$.
2. Так как $DO \parallel AE$ и $DP = DE$, то DO — средняя линия треугольника AEP. Таким образом, $DO = \frac{1}{2}a$.
3. Треугольник BDO — равнобедренный, $BN \perp DO$, следовательно,
$$DN = \frac{1}{2}DO, \text{ т. е. } DN = \frac{1}{4}a.$$
4. Так как $DN \parallel KM$ и $NM \parallel DK$, то $KM = DN = \frac{1}{4}a$. Заметим, что если треугольник ABC равносторонний, то отрезки EP и BC совпадают и, очевидно,
$$KM = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}a.$$

818. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей.

1. Докажем, что точка O является серединой хотя бы одной из диагоналей AC или BD. Предположим, что это не так. Пусть, например, $DO < BO$, $AO < CO$. Отметим точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно точки O (рис. 127). Так как $\triangle BOC = \triangle B_1OC_1$, то их периметры равны: $P_{BOC} = P_{B_1OC_1}$.

По условию $P_{BOC} = P_{AOD}$, следовательно, $P_{B_1OC_1} = P_{AOD}$. Отсюда приходим к равенству $DA = DB_1 + B_1C_1 + C_1A$, которое, очевидно, не выполняется. Значит, наше предположение неверно и точка O является серединой хотя бы одной диагонали.

2. Пусть, например, $AO = CO$. Так как $P_{AOB} = P_{BOC}$, т. е. $AB + AO + BO = BC + CO + BO$, то $AB = BC$. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный и поэтому медиана BO является высотой: $BO \perp AC$.
3. Докажем теперь, что $BO = DO$. Допустим, что $BO \neq DO$. Пусть, например, $BO < DO$. Тогда, сравнивая гипотенузы прямоугольных треугольников AOB и AOD, приходим к выводу, что $AB < AD$. Следовательно, $P_{AOB} < P_{AOD}$, что противоречит условию задачи. Поэтому $BO = DO$.
4. Итак, диагонали четырёхугольника $ABCD$ в точке O пересечения делятся пополам, значит, этот четырёхугольник — параллелограмм, а так как $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб.

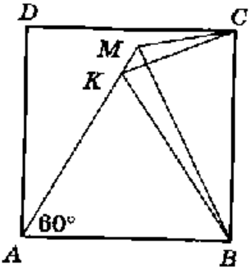


Рис. 128

825. На луче AM отложим отрезок AK, равный AB, и рассмотрим треугольник ABK (рис. 128).

1. Треугольник ABK равносторонний, так как $AK = AB$ и $\angle A = 60°$.
2. Так как $BK = AB$, то $BK = BC$ и, значит, треугольник BCK равнобедренный. Поскольку $\angle KBC = 90° - 60° = 30°$, то

$$\angle KCB = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Поэтому $\angle KCD = 15°$.

3. По условию $\angle MCD = 15°$, поэтому лучи CM и CK совпадают, и, следовательно, совпадают точки M и K.
4. Итак, $\angle MBC = \angle KBC = 30°$.

831. Введём обозначение: $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK} = x$ (рис. 129).

1. Сравнивая площади треугольников AMP и CMP, получаем

$$\frac{S_{AMP}}{S_{CMP}} = \frac{AM}{MC} = x, \text{ откуда } S_{CMP} = \frac{1}{x} \cdot S_1.$$

2. Аналогично, сравнивая площади треугольников BKP и CKP, находим

$$S_{SKP} = x \cdot S_2.$$

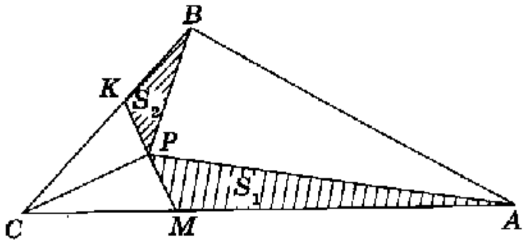


Рис. 129

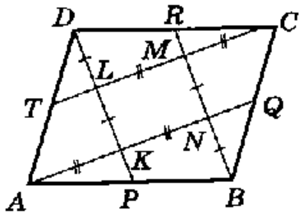


Рис. 130

3. Так как $\frac{S_{CMP}}{S_{CKP}} = \frac{MP}{PK} = x$, то $\frac{\frac{1}{x} \cdot S_1}{x \cdot S_2} = x$, откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{S_1}{S_2}},$$

и, следовательно,

$$S_{CMP} = \frac{1}{x} \cdot S_1 = \sqrt[3]{S_1^2 S_2}, \quad S_{CKP} = x \cdot S_2 = \sqrt[3]{S_1 S_2^2},$$

$$S_{CKM} = S_{CKP} + S_{CMP} = \sqrt[3]{S_1 S_2^2} + \sqrt[3]{S_1^2 S_2}.$$

4. Воспользуемся теоремой об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CKM}} = \frac{CB \cdot CA}{CK \cdot CM}.$$

Но

$$\frac{CB \cdot CA}{CK \cdot CM} = \frac{CK + KB}{CK} \cdot \frac{CM + MA}{CM} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + x).$$

Поэтому

$$S_{ABC} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + x) S_{CKM}.$$

Подставляя в правую часть равенства выражения для x и S_{CKM}, после некоторых преобразований приходим к равенству

$$S_{ABC} = \left(\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2}\right)^3.$$

832. Указание. Сначала доказать, что $TC \parallel AQ$ и $PD \parallel BR$ (рис. 130). Затем доказать, что площадь каждого из треугольников ABN, BCM, CDL и DAK равна площади параллелограмма $KLMN$.

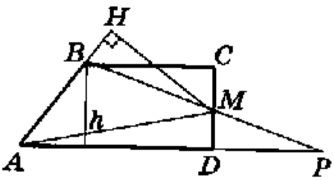


Рис. 131

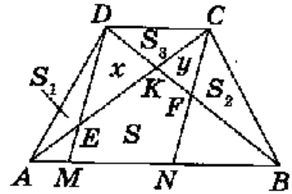


Рис. 132

833. Пусть AB — боковая сторона, точка M — середина другой боковой стороны CD, h — высота, S — площадь трапеции $ABCD$, MH — перпендикуляр, проведённый к прямой AB (рис. 131). Докажем, что $S = AB \cdot MH$. Обозначим буквой P точку пересечения прямых BM и AD.

1. Так как $\triangle BCM = \triangle PDM$, то $BC = DP$ и $S_{BCM} = S_{PDM}$. Следовательно,

$$S = S_{ABP} = S_{ABM} + S_{AMP}.$$

2. $S_{AMP} = \frac{1}{2}AP \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}AP \cdot h = \frac{1}{4}(AD + BC)h = \frac{1}{2}S.$

Таким образом, $S = S_{ABM} + \frac{1}{2}S$, откуда $S = 2S_{ABM}$.

3. $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot MH$, следовательно, $S = AB \cdot MH$.

835. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AB и CD, $DM \parallel CN$ (рис. 132). Обозначим площади пятиугольника и треугольников, как показано на рисунке: $S = S_{MNFKE}$, $S_1 = S_{AED}$, $S_2 = S_{BFC}$, $S_3 = S_{CDK}$, $x = S_{EDK}$, $y = S_{FCK}$. Треугольники ACD, BCD и параллелограмм $MNCD$ имеют общее основание CD, а их высоты равны высоте данной трапеции, поэтому

$$S_{ACD} = S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{MNCD},$$

откуда $S_{MNCD} = S_{ACD} + S_{BCD}$.

Запишем это равенство в виде

$$S + x + S_3 + y = (S_1 + x + S_3) + (S_2 + y + S_3).$$

Отсюда следует:

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

что и требовалось доказать.

839. 1. Докажем сначала, что $S_{AMB} = S_{ADK} + S_{BCK}$. Для этого проведём высоты MM_1, DD_1 и CC_1 соответствующих треугольников (рис. 133). Тогда $DD_1 \parallel MM_1 \parallel CC_1$, и так как $DM = MC$, то $MM_1 = \frac{1}{2}(CC_1 + DD_1)$. Далее,

$$S_{AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot MM_1, \quad S_{ADK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\right)DD_1, \quad S_{BCK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\right)CC_1.$$

Отсюда получаем

$$S_{AMB} = S_{ADK} + S_{BCK}.$$

2. $S_{AMB} = S + x + y$, $S_{ADK} = S_1 + x$, $S_{BCK} = S_2 + y$ (обозначения площадей см. на рисунке 133). Подставляя эти выражения в равенство $S_{AMB} = S_{ADK} + S_{BCK}$, приходим к равенству $S = S_1 + S_2$, что и требовалось доказать.

843. 1. Точки M и K лежат по одну сторону от прямой CD, так как в противном случае $S_{BDM} \neq S_{BCK}$.

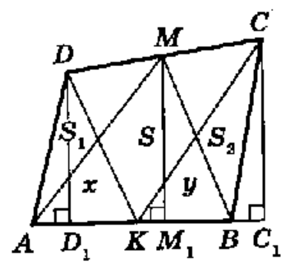


Рис. 133

2. Докажем сначала, что $S_{CDK} = S_{CDM}$ (рис. 134). В самом деле, $S_{CDK} = S_{BCK} - S_{BCD}$, $S_{CDM} = S_{BDM} - S_{BCD}$, если точки M, K и точка B лежат по разные стороны от прямой CD, как показано на рисунке 134, и $S_{CDK} = S_{BCD} - S_{BCK}$, $S_{CDM} = S_{BDM} - S_{BCD}$, если точки M, K и B лежат по одну сторону от прямой CD. В любом случае из этих равенств следует, что $S_{CDK} = S_{CDM}$.

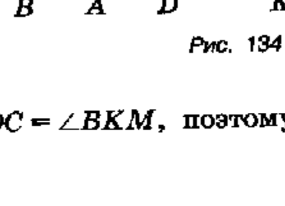


Рис. 134

3. Треугольники CDK и CDM имеют общее основание CD, поэтому их высоты равны, и, следовательно, $CD \parallel MK$.

4. Так как треугольник ACD равнобедренный, то $\angle ADC = \frac{\alpha}{2}$. Но $\angle ADC = \angle BKM$, поэтому $\angle BKM = \frac{\alpha}{2}$.

849. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты данного остроугольного треугольника ABC (рис. 135). Так как треугольник ABC остроугольный, то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB.

1. $\triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1$ по двум углам ($\angle A_1 = \angle C_1 = 90°$, $\angle B$ — общий), следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B}{BC_1}$, откуда $\frac{AB}{A_1B} = \frac{BC}{BC_1}$.

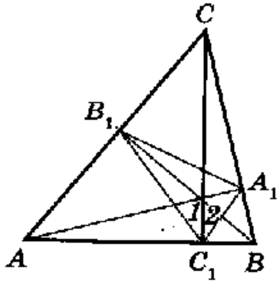


Рис. 135

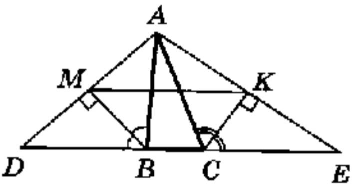


Рис. 136

Отсюда следует, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ (по второму признаку). Аналогично доказывается, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$.

2. $\angle 1 = 90° - \angle AC_1B_1$, $\angle 2 = 90° - \angle A_1C_1B$. Но из доказанного выше подобия треугольников следует, что $\angle AC_1B_1 = \angle A_1C_1B = \angle ACB$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, т. е. луч C_1C — биссектриса угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что A_1A и B_1B — биссектрисы двух других углов.

852. Пусть D и E — точки пересечения прямых AM и AK с прямой BC (рис. 136).

1. В треугольнике ABD отрезок BM — высота и биссектриса, следовательно, $BA = BD$ и $AM = MD$ (задача 133).
2. Аналогично в треугольнике ACE $CA = CE$ и $AK = KE$.
3. Отрезок MK — средняя линия треугольника ADE, поэтому

$$MK = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(DB + BC + CE) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

866. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC и пусть $BC = a$.

1. Проведём отрезки AP и AQ, параллельные медианам BB_1 и CC_1 (рис. 137). Тогда BB_1 — средняя линия тре-

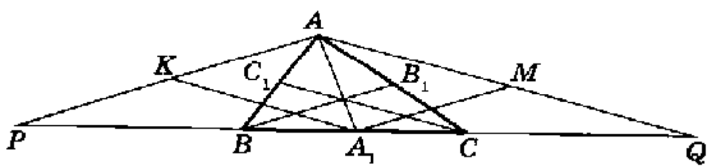


Рис. 137

угольника ACP, поэтому $AP = 2BB_1$. Аналогично $AQ = 2CC_1$. Кроме того,

$$PB = BC = CQ = a,\ PA_1 = A_1Q = \frac{3}{2}a.$$

2. Проведём средние линии A_1M и A_1K треугольника APQ. Тогда

$$A_1M = \frac{1}{2}AP = BB_1,\ \ AM = \frac{1}{2}AQ = CC_1.$$

Таким образом, стороны треугольника AA_1M равны соответственно медианам треугольника ABC, т. е. треугольник AA_1M равен треугольнику EGF, указанному в условии задачи.

3. Пусть высота треугольника ABC, проведённая из вершины A, равна h. Тогда высота треугольника A_1MQ, проведённая из вершины M, равна $\frac{1}{2}h$. Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah,\ S_{AA_1Q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}ah = \frac{3}{4}ah,\ S_{A_1MQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}h = \frac{3}{8}ah.$$

Следовательно,

$$S_{EFG} = S_{AA_1M} = S_{AA_1Q} - S_{A_1MQ} = \frac{3}{8}ah,\ \frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3}{8}ah}{\frac{1}{2}ah} = \frac{3}{4}.$$

871. Пусть даны угол hk и отрезок PQ (рис. 138, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle hk$, $AB = AC$, $BC + AH = PQ$, где AH — высота треугольника ABC.

А н а л и з. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 138, *б*). Проведём какой-нибудь отрезок B_1C_1, параллельный отрезку BC. Получим треугольник AB_1C_1, по-

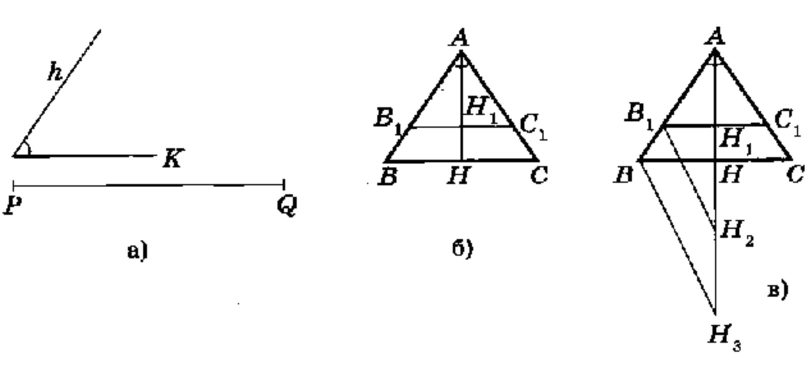


Рис. 138

добный треугольнику ABC. Ясно, что равнобедренный треугольник AB_1C_1 с заданным углом A построить нетрудно. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AH_1}{AB_1}=\frac{AH}{AB}, \quad \frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{BC}{AB}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{AH_1+B_1C_1}{AB_1}=\frac{AH+BC}{AB}, \text{ т. е. } \frac{AH_1+B_1C_1}{AB_1}=\frac{PQ}{AB}.$$

Если треугольник AB_1C_1 построен, то отрезки с длинами $(AH_1+B_1C_1)$ и AB_1 нам известны. Отрезок PQ задан условием задачи. Таким образом, из последнего равенства можно определить сторону AB искомого треугольника: $AB=\frac{AB_1\cdot PQ}{AH_1+B_1C_1}$. Это соотношение указывает способ построения треугольника ABC.

Построение. Строим какой-нибудь равнобедренный треугольник AB_1C_1, в котором $\angle A=\angle hk$, $AB_1=AC_1$ (рис. 138, *в*). Проводим высоту AH_1 этого треугольника и на луче AH_1 откладываем отрезки

$$AH_2=AH_1+B_1C_1 \text{ и } AH_3=PQ.$$

Через точку H_3 проводим прямую, параллельную B_1H_2. Она пересекает луч AB_1 в точке B. На луче AC_1 откладываем отрезок $AC=AB$. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. По построению $\angle A=\angle hk$, $AB=AC$. Докажем, что $BC+AH=PQ$. По построению $H_1H_2=AH_2-AH_1=B_1C_1$. Треугольники $B_1H_1H_2$ и BHH_3 подобны, поэтому

$$\frac{B_1H_1}{H_1H_2}=\frac{BH}{HH_3}, \text{ или } \frac{\frac{1}{2}B_1C_1}{B_1C_1}=\frac{\frac{1}{2}BC}{HH_3}.$$

Отсюда следует, что $HH_3=BC$ и, значит,

$$AH+BC=AH+HH_3=AH_3=PQ.$$

Исследование. Из построения видно, что задача всегда имеет решение. Нетрудно доказать, что решение единственное.

872. Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. Для краткости записи обозначим их длины буквами b, c, a соответственно. Требуется построить треугольник ABC, у которого $AB=b$, $AC=c$, $AD=a$, где AD — биссектриса треугольника.

Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 139). Проведём $BE \parallel AC$. Получим равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE = b$). Выразим DE через a, b, c. Из подобия треугольников ADC и EDB имеем $\frac{DE}{AD} = \frac{BE}{AC}$, откуда $DE = \frac{ab}{c}$. По данным отрезкам с длинами a, b, c можно построить отрезок DE. После этого можно построить треугольник ABE, а затем искомый треугольник ABC.

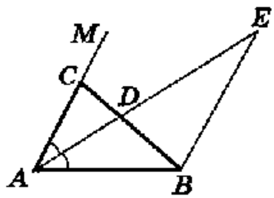


Рис. 139

Построение. Строим отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

Далее строим треугольник ABE по трём сторонам: $AB = BE = b$, $AE = a + \frac{ab}{c}$. Наконец, через точку A проводим луч AM так, что $\angle MAE = \angle EAB$, и на этом луче откладываем отрезок $AC = c$. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. По построению $AB = b$, $AC = c$, луч AE — биссектриса угла CAB. Пусть D — точка пересечения AE и BC. Из подобия треугольников ADC и EDB получаем

$$AD = DE \cdot \frac{AC}{BE} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{c}{b} = a,$$

т. е. биссектриса AD треугольника ABC равна a. Итак, треугольник ABC — искомый.

Исследование. Ясно, что треугольник ABC можно построить в том и только в том случае, когда можно построить треугольник ABE, а для этого его стороны должны удовлетворять соотношению $AE < AB + BE$. По $AB + BE = 2AB$, поэтому должно выполняться неравенство $a + \frac{ab}{c} < 2b$, или $a < \frac{2bc}{b+c}$. Если данные отрезки с длинами a, b, c удовлетворяют этому условию, то задача имеет решение. В противном случае решения нет.

Нетрудно доказать, что если решение есть, то оно единственное. В самом деле, допустим, что имеются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющие условиям задачи. Для каждого из них выполним такое же построение, как на рисунке 139. Тогда получим $\triangle ABE = \triangle A_1B_1E_1$ (по трём сторонам), поэтому $\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$, следовательно, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны. Значит, равны и сами треугольники (по двум сторонам и углу между ними). Это и доказывает единственность решения.

875. Задачу нужно понимать так: даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, M_1N_1, M_2N_2 и угол hk. Требуется построить трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD так, чтобы $AB = P_1Q_1$,

$$AD = P_2Q_2,\ BC < AD,\ \angle A = \angle hk,$$
$$BC : CD = M_1N_1 : M_2N_2.$$

Построение. Сначала построим треугольник ABD по двум сторонам и углу между ними: $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$ (рис. 140). Затем через точку B проведём прямую p, параллельную AD, и на этой прямой по ту же сторону от прямой AB, что и точка D, отложим отрезок $BC_1 = M_1N_1$.

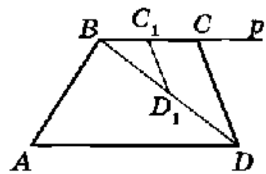


Рис. 140

Далее построим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке C_1. Пусть D_1 — общая точка этой окружности и луча BD. Проведём через точку D прямую DC, параллельную D_1C_1 ($C \in p$). Если при этом окажется, что $BC < AD$, то трапеция $ABCD$ — искомая.

Доказательство. По построению $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$, $\frac{BC}{CD} = \frac{BC_1}{C_1D_1} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2}$, $BC < AD$, т. е. трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке C_1 либо не имеет общих точек с лучом BD, либо имеет одну или две общие точки. В первом случае задача не имеет решений, во втором случае задача может иметь решение, но может и не иметь его, в третьем случае решения может не существовать, может существовать единственное решение и, наконец, могут существовать два решения. Все эти случаи можно предложить рассмотреть более сильным учащимся.

876. Пусть даны два отрезка (обозначим их длины буквами m и n) и дан квадрат (обозначим его сторону буквой a). Требуется построить ромб $ABCD$, у которого $AC : BD = m : n$, $S_{ABCD} = a^2$.

Анализ. Положим $AC = x$, $BD = y$. Тогда по условию

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n},\ \frac{1}{2}xy = a^2.$$

Отсюда находим x и y:

$$x = \frac{\sqrt{2}am}{\sqrt{mn}},\ y = \frac{\sqrt{2}an}{\sqrt{mn}}.$$

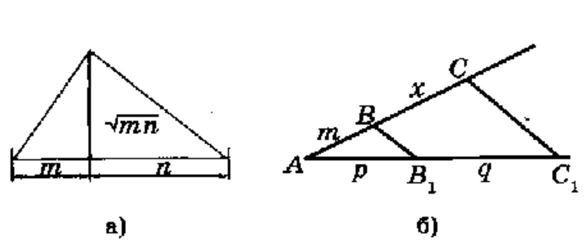


Рис. 141

Мы получили формулы, которые позволяют построить отрезки, равные диагоналям искомого ромба, а затем построить и сам ромб.

Построение. Сначала построим отрезок длиной $p=\sqrt{mn}$ (рис. 141, *а*). Отрезок длиной $q=\sqrt{2}a$ — это диагональ данного квадрата. Далее построим отрезки с длинами $x=\frac{qm}{p}$ и $y=\frac{qn}{p}$ (рис. 141, *б*). После этого построим взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O (рис. 141, *в*), и на лучах этих прямых отложим отрезки $OA=\frac{x}{2}$, $OC=\frac{x}{2}$ (на одной прямой) и $OB=\frac{y}{2}$, $OD=\frac{y}{2}$ (на другой прямой). Очевидно, $ABCD$ — искомый ромб, причём при любых данных m, n, a задача имеет единственное решение.

877. По условию данные окружности (обозначим их центры O и O_1, а радиусы r_1 и r_2) имеют единственную общую точку M. Отсюда следует, что точка M лежит на прямой O_1O. В самом деле, если предположить, что точки M, O_1 и O не лежат на одной прямой (рис. 142, *а*), то точка M_1, симметричная точке M относительно прямой O_1O, также является общей точкой данных окружностей (так как $OM=OM_1=r_1$, $O_1M=O_1M_1=r_2$). Но это противоречит

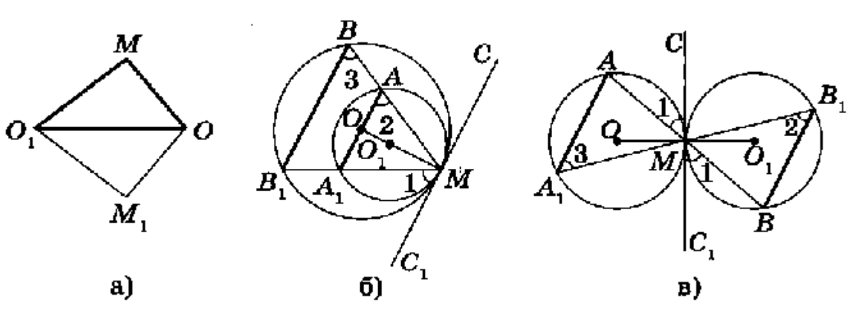


Рис. 142

условию задачи. Итак, $M \in O_1O$. Поэтому прямая CC_1, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой O_1O, является общей касательной данных окружностей.

На рисунке 142, *б*, *в* изображены два возможных случая в зависимости от положения точки M относительно отрезка OO_1. Из теоремы о вписанном угле и результата задачи 664 следует, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$. Поэтому $\angle 2 = \angle 3$, и, значит, $AA_1 \parallel BB_1$.

881. Проведём диаметр BM данной окружности (рис. 143). Так как $BM \parallel AD$, то $\angle 1 = \angle 2$ и поэтому прямоугольные треугольники ABM и DAB подобны. Из их подобия следует:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{AB},$$

откуда

$$\frac{AB^2}{AD} = BM,$$

т. е. для всех хорд AB отношение $\frac{AB^2}{AD}$ имеет одно и то же значение, равное диаметру данной окружности.

893. На диагонали AC данного вписанного четырёхугольника $ABCD$ возьмём точку K так, чтобы $\angle ABK = \angle CBD$ (рис. 144).

1. $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ по двум углам, поэтому $\frac{AK}{CD} = \frac{AB}{BD}$, откуда $AK = \frac{AB \cdot CD}{BD}$.
2. $\triangle BCK \sim \triangle BDA$ (по двум углам: $\angle CBK = \angle DBA$, $\angle C = \angle D$), поэтому $\frac{KC}{AD} = \frac{BC}{BD}$, откуда $KC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$.
3. Сложив выражения для AK и KC, получим $AC = AK + KC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD}$, откуда $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, что и требовалось доказать.

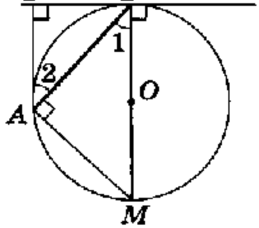


Рис. 143

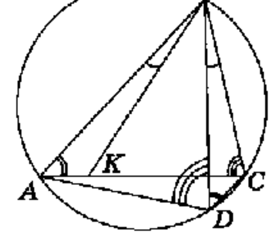


Рис. 144

895. Докажем, что точка M — середина отрезка OH — является центром окружности Эйлера, проходящей через девять указанных точек (рис. 145; на рисунке отмечены только пять из девяти точек: A_1, A_2, A_3, B_1, B_3).

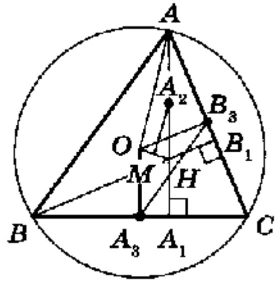


Рис. 145

1. Отрезок A_2M — средняя линия треугольника AHO, поэтому

$$A_2M = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2},$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

2. Стороны треугольников AHB и A_3OB_3 соответственно параллельны, поэтому эти треугольники подобны, причём коэффициент подобия равен $\frac{AB}{A_3B_3} = 2$. Отсюда следует, что

$$OA_3 = \frac{1}{2}AH = A_2H.$$

Так как $OA_3 \parallel A_2H$, то четырёхугольник OA_3HA_2 — параллелограмм, а M — точка пересечения его диагоналей. Следовательно,

$$MA_3 = MA_2 = \frac{R}{2}.$$

3. Точка M равноудалена от параллельных прямых AA_1 и OA_3, и так как $A_1A_3 \perp AA_1$ и $A_1A_3 \perp OA_3$, то $MA_1 = MA_3 = \frac{R}{2}$.

4. Итак, мы доказали, что точки A_1, A_2 и A_3 лежат на окружности с центром M радиуса $\frac{R}{2}$. Точно так же доказывается, что точки B_1, B_2, B_3, а также точки C_1, C_2, C_3 лежат на этой окружности.

896. Пусть ABC — данный треугольник, а H, K и M — основания перпендикуляров, проведённых из произвольной точки D описанной окружности к прямым AB, AC и BC (рис. 146).

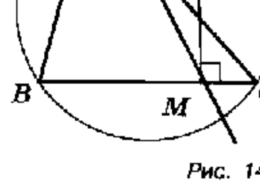


Рис. 146

Допустим, что луч DK лежит внутри угла HDM. Так как $\angle HDM = \angle ADC$ (каждый из этих углов равен $180° - \angle B$), то либо эти углы совпадают, либо один из лучей DM или DH лежит внутри угла ADC, а другой вне его. В первом случае точка H совпадает с точкой A, а точка M — с точкой C и утверждение задачи очевидно. Во втором случае точки H и M лежат по разные стороны от прямой AC, поэтому для решения задачи достаточно доказать, что $\angle AKH = \angle MKC$: это будет означать, что точки H, K и M лежат на одной прямой.

1. В четырёхугольнике $AHDK$ $\angle H + \angle K = 180°$, поэтому около него можно описать окружность, и, следовательно, вписанные в эту окружность углы AKH и ADH опираются на одну и ту же дугу AH и потому $\angle AKH = \angle ADH$.
2. Так как $\angle HDM = \angle ADC$, то $\angle ADH = \angle MDC$.
3. Так как углы DMC и DKC прямые, то точки M и K лежат на окружности с диаметром CD. Поэтому $\angle MDC = \angle MKC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу MC).

   Таким образом, из полученных равенств следует, что $\angle AKH = \angle MKC$.

Примерное тематическое планирование учебного материала

Номер пара-графа	Содержание материала	Кол-во часов
Глава V. Четырёхугольники		**14**
1	Многоугольники	2
2	Параллелограмм и трапеция	6
3	Прямоугольник, ромб, квадрат	4
	Решение задач	1
	Контрольная работа № 1	1
Глава VI. Площадь		**14**
1	Площадь многоугольника	2
2	Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	6
3	Теорема Пифагора	3
	Решение задач	2
	Контрольная работа № 2	1
Глава VII. Подобные треугольники		**19**
1	Определение подобных треугольников	2
2	Признаки подобия треугольников	5
	Контрольная работа № 3	1
3	Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	7

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Кол-во часов
4	Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	3
	Контрольная работа № 4	1
Глава VIII. Окружность		**17**
1	Касательная к окружности	3
2	Центральные и вписанные углы	4
3	Четыре замечательные точки треугольника	3
4	Вписанная и описанная окружности	4
	Решение задач	2
	Контрольная работа № 5	1
Повторение. Решение задач		**4**
Всего		**68**

Содержание

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Фёдорович
Глазков Юрий Александрович
Некрасов Владимир Борисович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации
8 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *О. П. Богомолова, А. Б. Юдкин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *Н. Д. Николишина*
Техническое редактирование
и компьютерная вёрстка *Е. В. Власовой*
Корректоры *Н. В. Белозёрова, Г. Н. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 08.04.16. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 2. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,3. Тираж 3000 экз. Заказ № 4316.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд»
в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.